مسائل آنالیز ریاضی

تهیه و تنظیم: علی مرصّعی

۱. فرض کنید A_n، G_n و H_n به ترتیب نمایش میانگین‌های حسابی، هندسی و همساز از n عدد حقیقی مثبت $a_۱, \cdots, a_n$ باشند؛ یعنی

$$\begin{aligned} A_n =& \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n}, \\ G_n =& \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \cdots a_n}, \\ H_n =& \frac{n}{\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_n}}. \end{aligned}$$

نشان دهید $A_n \geq G_n \geq H_n$.

۲. نشان دهید که برای هر $x > ۰$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\frac{x^n}{۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots + x^{۲n}} \leq \frac{۱}{۲n + ۱}.$$

۳. فرض کنید $a_۱, a_۲, \cdots, a_p$ اعدادی مثبت باشند. دنباله‌های زیر را در نظر بگیرید

$$s_n = \frac{a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_p^n}{p}, \quad x_n = \sqrt[n]{s_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

نشان دهید دنباله $\{x_n\}$ به‌طور یکنوا صعودی است.

۴. همگرایی دنباله‌های زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} a_n =& -۲\sqrt{n} + \left(\frac{۱}{\sqrt{۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}}\right), \\ b_n =& -۲\sqrt{n + ۱} + \left(\frac{۱}{\sqrt{۱}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

۵. دنباله بازگشتی $\{a_n\}$ به‌صورت زیر داده شده است،

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n} \quad (n \geq 2) .$$

نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ کراندار و اکیداً صعودی است. سپس حد آن را بیابید.

۶. حدود زیر را پیدا کنید:

(آ) $\lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{e} - 1 \right)$،

(ب) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}}{n}$.

۷. نشان دهید که برای هر دنباله مثبت $\{a_n\}$،

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

۸. فرض کنید $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \ln \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \quad (n \geq 1) .$$

قرار دهید $b_n = a_1 a_2 \cdots a_n$. مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ را به‌دست آورید.

۹. مطلوبست محاسبه مقدار

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) .$$

۱۰. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد و فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ell .$$

ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست هرگاه $1 < \ell$ و واگراست هرگاه $\ell < 1$ (حالت‌های $\ell = +\infty$ و $\ell = -\infty$ نیز شامل هستند). نشان دهید که اگر $\ell = 1$، آنگاه آزمون بی‌نتیجه است (آزمون لگاریتمی).

۱۱. همگرایی یا واگرایی سری زیر را مشخص کنید:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln(\ln n)}} , \quad (a > 0) .$$

۱۲. نشان دهید که اگر $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابع پیوسته و متناوب باشند و $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=0$، آنگاه $f=g$.

۱۳. فرض کنید $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند به‌طوری‌که $f(a)<g(a)$ و $f(b)>g(b)$. ثابت کنید که $x_0\in(a,b)$ چنان موجود است که $f(x_0)=g(x_0)$.

۱۴. ثابت کنید که اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی باشد (یعنی برای هر $a<b$، اگر $f(a)<v<f(b)$ یا $f(b)<v<f(a)$ باشد آنگاه $c\in(a,b)$ چنان موجود است که $f(c)=v$)، و برای هر عدد گویای q، $f^{-1}(\{q\})$ بسته باشد آنگاه f پیوسته است.

۱۵. نشان دهید هر تابعی که روی یک بازه $I\subseteq\mathbb{R}$، کراندار، یکنوا و پیوسته باشد، پیوسته یکنواخت است.

۱۶. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در صفر پیوسته و در شرایط زیر صدق می‌کند:

(آ) $f(0)=0$،

(ب) برای هر $x_1,x_2\in\mathbb{R}$، $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$. ثابت کنید f روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

۱۷. همه توابع پیوسته $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را معین کنید که $f(1)>0$ و برای هر $x,y\in\mathbb{R}$،

$$f(x+y)=f(x)f(y)\,.$$

۱۸. فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر و $f(a)=f(b)=0$ باشد. نشان دهید برای یک عدد حقیقی α، $x\in(a,b)$ چنان موجود است که $\alpha f(x)+f'(x)=0$.

۱۹. فرض کنید f روی $[0,2]$ پیوسته و روی $(0,2)$ دوبار مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(0)=0$، $f(1)=1$ و $f(2)=2$ باشد آنگاه نشان دهید که

$$\exists x_0\in(0,2)\,,\quad f''(x_0)=0\,.$$

۲۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x++\frac{1}{2}h\right)\,,\quad x,h\in\mathbb{R}\,,\ h\neq 0\,.$$

ثابت کنید که f یک چندجمله‌ای درجه ۲ است.

۲۱. فرض کنید $f:(\circ,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد که f'' موجود است. ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\circ$، آنگاه $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\circ$.

۲۲. همگرایی و همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع زیر را روی دامنه‌های داده شده بررسی کنید:

(آ) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ روی $D=\mathbb{R}$.

(ب) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ روی $D=[-1,1]$.

۲۳. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته روی $[\circ,1]$ باشد به‌طوری‌که $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ روی $[\circ,1)$ همگرای یکنواخت است. نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)$ همگراست.

۲۴. مقدار حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1}nx(1-x^2)^n\mathrm{d}x\,.$$

۲۵. فرض کنید f تابعی مثبت و پیوسته روی $[\circ,1]$ باشد. مقدار انتگرال زیر را به‌دست آورید

$$\int_{\circ}^{1}\frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\mathrm{d}x\,.$$

۲۶. برای تابع پیوسته f روی $[\circ,1]$، مطلوبست محاسبه

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{1}f(x^n)\mathrm{d}x\,.$$

۲۷. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد که برای هر $n=\circ,1,2\cdots$

$$\int_a^b x^nf(x)\mathrm{d}x=\circ\,.$$

ثابت کنید f روی $[a,b]$ متحد صفر است.

۲۸. برای تابع پیوسته f روی $\mathbb{R}$، مطلوبست

$$\lim_{h\to\circ}\frac{1}{h}\int_a^b\big(f(x+h)-f(x)\big)\mathrm{d}x\,.$$

۲۹. فرض کنید f تابع یکنوایی روی $(۰, ۱)$ باشد که انتگرال ناسره $\int_۰^۱ f(x)\mathrm{d}x$ موجود است. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{۱}{n}\right) + f\left(\frac{۲}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-۱}{n}\right)}{n} = \int_۰^۱ f(x)\mathrm{d}x\,.$$

۳۰. حدود زیر را به‌دست آورید:

(آ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$،

(ب) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{۲n}.\sin\frac{۲\pi}{۲n}.\cdots.\sin\frac{(n-۱)\pi}{۲n}}$