گزارش دوّمین کارسوق ریاضی مدرسه فرزانگان زنجان

تاریخ آخرین ویرایش

۱۵ دی ۱۳۹۸

فهرست مطالب

۱ مقدّمه ۳

۲ اعداد اوّل ۵
۱.۲ مقدّمه ۵
۲.۲ آزمون اوّل بودن و غربال اراتستن ۶
۳.۲ قواعد بخش‌پذیری برای تمام اعداد اوّل ۷
۴.۲ روش تجزیهٔ اعداد بزرگ و آزمون اوّل بودن فرما ۸
۵.۲ اعداد اوّل فرما ۹
۶.۲ چندضلعی‌های منتظم ترسیم پذیر ۱۱
۱.۶.۲ روش ریچموند برای ترسیم پنج ضلعی منتظم ۱۲
۲.۶.۲ طبقه‌بندی چندضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر ۱۲
۷.۲ قضیهٔ لژاندر برای تجزیهٔ فاکتوریلها ۱۳
۸.۲ نتیجه‌گیری و جمعبندی ۱۵

۳ آموزش مبحث فراکتال‌ها برای دانش آموزان متوسطه ۱۷
۱.۳ مقدمه ۱۷
۲.۳ فراکتال‌ها: ترسیم و بعد ۱۸
۱.۲.۳ مثلث سرپینسکی ۱۸
۲.۲.۳ منحنی کخ ۲۰
۳.۳ به کارگیری اینترنت و نرم‌افزار ۲۰
۱.۳.۳ نرم افزار Mathematica و سایت Wolframalpha ۲۰
۲.۳.۳ نرم افزار Ultrafractal ۲۰
۴.۳ کاربردها و نتایج ۲۱

۴ آموزش رنگ‌آمیزی گراف‌ها برای دانش‌آموزان متوسطه ۲۳
۱.۴ مقدمه ۲۳
۲.۴ نظریه گراف ۲۳
۱.۲.۴ رنگ‌آمیزی راسی ۲۴

۲.۲.۴ رنگ‌آمیزی یالی ۲۷
۳.۲.۴ رنگ‌آمیزی کلی ۲۸
۳.۴ کاربردها ۲۹
۱.۳.۴ زمان‌بندی پروژه ۲۹
۲.۳.۴ زمان‌بندی مسابقات ۲۹
۳.۳.۴ قضیه چهاررنگ ۳۱
۴.۴ نتیجه گیری ۳۲

۵ اجسام افلاطونی و توپ فوتبال ۳۳
۱.۵ اجسام افلاطونی ۳۳
۲.۵ اجسام افلاطونی و توپ‌های فوتبال ۳۴

۶ چند مساله راجع به مسابقات و جدول لیگ‌ها در فوتبال ۳۹
۱.۶ مسابقات فوتبال ۳۹
۲.۶ مساله‌های مربوط به مسابقات گروهی ۴۰
۳.۶ سیستم‌های بازی فوتبال ۴۷
۴.۶ مساله‌های مربوط به مسابقات حذفی ۴۸
۵.۶ مساله‌های مربوط به اعداد مثلثی ۴۹

۱ مقدّمه

مهدی حسنی

استاد عزیز جناب آقای دکتر سید عباداله محمودیان در تاریخ ۶ آذر ۱۳۹۷ ساعت ۱۴:۳۰ طی تماس تلفنی با بنده دربارهٔ بنیاد تازه تاسیس مریم میرزاخانی، به یاد زنده‌یاد دکتر مریم میرزاخانی، اطلاع رسانی کرده و ایدهٔ اجرای یک دوره استعدادیابی در مدرسه فرزانگان زنجان، به مدیریت سرکار خانم رضائی، را طرح کردند. عصر همانروز جلسه‌ای با حضور دکتر محمودیان، خانم رضائی، دکتر رشید زارع نهندی، دکتر فاطمه راعی، دکتر محمدباقر کاظمی و بنده تشکیل و دربارهٔ مقدمات کار بحث و گفتگو شد. پس از چندین جلسه حضوری و غیرحضوری، بالاخره جلسهٔ افتتاحیه روز چهارشنبه ۲۶ دی ماه ۱۳۹۷ با حضور و سخنرانی دکتر محمودیان آغاز شد. سپس دانش‌آموزان (که همگی از دورهٔ اول متوسطه، یعنی پایه‌های ۷، ۸ و ۹ بودند) در دو گروه حدوداً ۲۵ نفره تقسیم شدند و کار با ایشان آغاز گردید. تنظیم برنامه و محتوا بر اساس هدف اصلی این برنامه صورت گرفته است. هدف از این برنامه ارائهٔ مطالب ریاضی در سطح درس ولی خارج از برنامهٔ رایج مدرسه و کتاب درسی است. بدون ایجاد نگرانی درباره امتحان و ارزشیابی، دانش‌آموزان در این دوره با زیبایی‌های ریاضی آشنا و دورنمایی از آنچه که در دنیای ریاضی می‌گذرد، آشنا می‌شوند. در ضمن تدریس و کار دانش‌آموزان مستعد و علاقه‌مند شناسایی و به فراخور علاقه‌مندی‌شان برنامه‌های غنی‌تر برایشان ارائه خواهد شد.

شکل ۱: تصاویری از جلسهٔ افتتاحیهٔ دوره با حضور استاد دکتر محمودیان

مدرسان این دوره آقایان مهدی حسنی (دربارهٔ اعداد)، محمدباقر کاظمی (دربارهٔ هندسه)، محمّدرضا اسفندیاری (دربارهٔ ورزش و ریاضیات)، مهدی مفیدی (دربارهٔ جئوجبرا)، و خانم راعی (دربارهٔ ترکیبیات) بودند. تعداد جلسات برگزار شده ۲۰ جلسه برای هر گروه در ۱۰ هفته بود. در بخشهای بعدی گزارشی از آنچه که در این دوره تدریس شده است ارائه می‌شود.

شکل ۲: تصاویری از جلسهٔ افتتاحیهٔ دوره با حضور خانم رضائی مدیریت محترم مدرسه فرزانگان

شکل ۳: تصاویری از جلسات تدریس آقای حسنی و خانم راعی

۲ اعداد اوّل

مهدی حسنی
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه زنجان

چکیده

در این نوشتار مطالبی دربارهٔ اعداد اوّل ارائه می‌کنیم که با اطلاعات دورهٔ اوّل متوسطه قابل فهم و بررسی است. این مطالب عمدتاً پاسخ به پرسشهایی است که دبیران و دانش‌آموزان دربارهٔ اعداد اوّل از مولّف داشته‌اند. طرح مکرّر اینچنین پرسشهایی که کاملاً بطور طبیعی به اذهان خطور می‌کند نشان می‌دهد که جای این مطالب در آموزشهای مدرسه‌ای چقدر خالی است. برخی از این سوالات که در این نوشتار طرح و بررسی می‌شوند عبارتند از اینکه آیا قاعدهٔ بخش‌پذیری برای هر عدد اوّل دلخواه وجود دارد؟ یا این پرسش که کدام چندضلعی‌ها را می‌توان با خطکش و پرگار رسم کرد؟ هرچند سوال دوم ظاهری هندسی دارد، جالب آنکه پاسخ آن در حوزهٔ اعداد اوّل داده می‌شود. در پایان قضیهٔ لژاندر برای تجزیهٔ فاکتوریلها را به عنوان یک نمونهٔ عملی از اجرای قضیهٔ اساسی حساب بیان و بررسی می‌کنیم.

۱.۲ مقدّمه

مقاله را با ارائهٔ تعریفی از اعداد اوّل آغاز می‌کنیم. این تعریف بر اساس تعداد شمارنده‌های[۱] مثبت عدد طبیعی داده شده انجام می‌شود. عددی طبیعی که دارای دقیقاً دو شمارنده مثبت باشد را عدد اوّل[۲] نامیم. مجموعهٔ این اعداد را با $\mathbb{P}$ نشان می‌دهیم[۳] که عبارتست از

$$\mathbb{P} = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, \ldots\}.$$

اعدادی که بیش از دو شمارنده مثبت دارند را اعداد مرکّب[۴] نامند. عدد ۱ دقیقاً یک شمارندهٔ مثبت دارد که خودش است، و لذا با طبقه‌بندی حاضر نه اوّل محسوب می‌شود و نه مرکّب.

اجازه دهید خیلی سریع به این پرسش که چرا اعداد اوّل مهم هستند پاسخ دهیم. حکم مهمی در ریاضیات، معروف به قضیهٔ اساسی حساب[۵] بیان می‌کند هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصلضرب اعداد اوّل نوشت. لذا

«اعداد اوّل به معنای واقعی سنگ بنای همهٔ اعداد صحیح هستند».

بررسی پراکندگی و توزیع اعداد اوّل در بین اعداد طبیعی موضوع مطالعهٔ بسیاری از ریاضیدانان بوده است. پس از قضیهٔ اساسی حساب که بنیادی بودن اعداد اوّل را در ساختارشناسی اعداد بیان می‌کند، خاتمه ناپذیر بودن این اعداد توسط اقلیدس اسکندرانی[۶] به اثبات رسید.

علاوه بر خاتمه ناپذیر بودن اعداد اوّل، مساله‌ای که در ریاضیات باستان دربارهٔ این اعداد مطرح شد تشخیص اوّل بودن یک عدد طبیعی (آزمون اوّل بودن[۷])، و غربال کردن اعداد اوّل از بین اعداد طبیعی بود. این کار پس از اقلیدس و توسط اِراتُستِن[۸] جغرافی‌دان، ریاضی‌دان و مسئول کتابخانه دانشگاه اسکندریه صورت گرفت.

[۱] شمارنده یا مقسوم‌علیه هر عدد صحیح n اعدادی هستند که n بر آنها بخش‌پذیر است. مقسوم‌علیه می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در این مقاله منظور ما از شمارنده یا مقسوم‌علیه، شمارنده‌های مثبت می‌باشد.

[2] Prime Number

[۳] نماد $\mathbb{P}$ برگرفته از کلمهٔ Prime است.

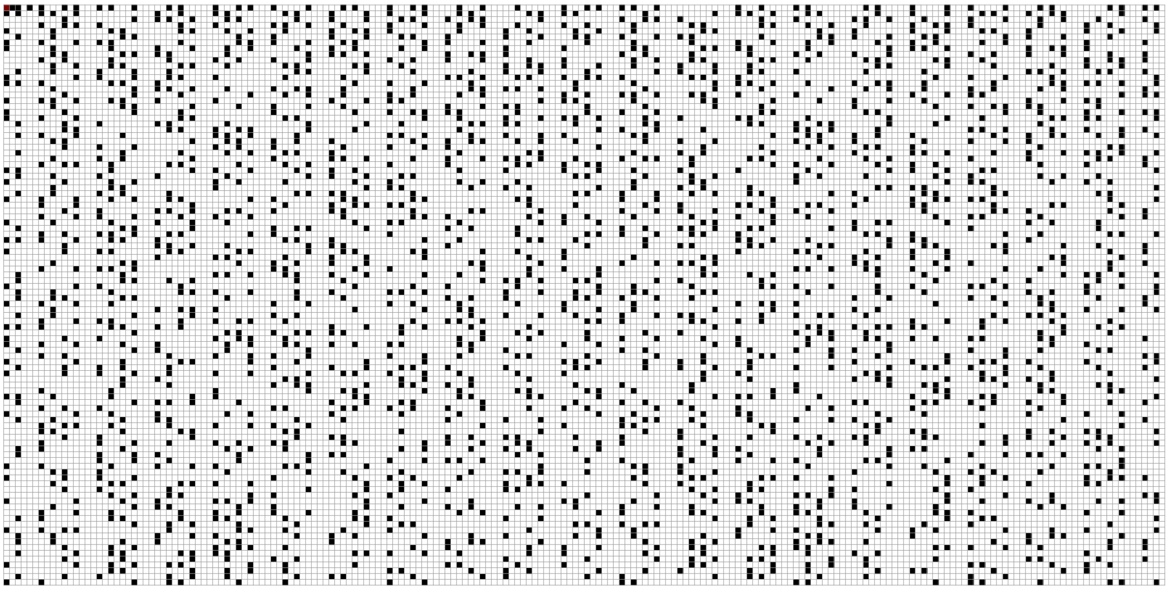
[4] Composite Number

[5] Fundamental Theorem of Arithmetic

[6] Euclid of Alexandria (325 BC-265 BC)

[7] Primality Test

[8] Eratosthenes of Cyrene (276 BC-194 BC)



شکل ۴: تصویر توزیع اعداد اوّل در فاصلهٔ ۱ تا ۲۰۰۰۰. در این تصویر برای اعداد طبیعی خانه‌هایی مربعی در یکصد سطر دویست‌تایی با شروع از گوشهٔ بالا چپ و به سمت راست چیده شده‌اند. در مواضع اعداد اوّل خانه سیاه و در مواضع اعداد مرکب سفید رنگ‌آمیزی شده است. عدد ۱ که نه اوّل است و نه مرکّب با رنگ قرمز نشان داده شده است.

۲.۲ آزمون اوّل بودن و غربال اراتستن

اساس کارکرد غربال اراتستن[۹] و آزمون اوّل بودن اعداد به روش اراتستن حکم زیر است.

لم ۱.۲. *فرض کنید $n > ۱$ عددی مرکب باشد. در این صورت n عامل اوّلی مانند p دارد که $p \leqslant \sqrt{n}$.*

اثبات. چون n مرکب است، می‌توان نوشت $n = ab$ که $۱ < a \leqslant b < n$. اگر هم $a > \sqrt{n}$ و هم $b > \sqrt{n}$ آنگاه $n = ab > (\sqrt{n})^۲ = n$ که تناقض است. پس اقلاً $a \leqslant \sqrt{n}$ یا $b \leqslant \sqrt{n}$ خواهد بود، مثلاً فرض کنیم $a \leqslant \sqrt{n}$. چون $a > ۱$ لذا یا اوّل است و یا مرکب، که حتماً عامل اوّلی دارد. به هر حال خودِ a یا عامل اوّلش، عامل n هم است، و البته نابیشتر از $\sqrt{n}$ نیز می‌باشد. اثبات کامل است. □

نتیجه ۲.۲. *(آزمون اوّل بودن اراتستن) اگر عدد $n > ۱$ در بین تمام اعداد اوّل نابیشتر از $\sqrt{n}$ عامل اوّلی نداشته باشد آنگاه اوّل است.*

نتیجه ۳.۲. *(الگوریتم غربال اراتستن) می‌خواهیم از بین اعداد $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ اعداد اوّل را غربال کنیم. برای اینکار مراحل زیر را انجام می‌دهیم:*

۱. *عدد ۱ را چون اوّل نیست خط می‌زنیم.*

۲. *عدد بعدی (یعنی ۲) که اوّل است را نگه داشته و تمام مضارب آنرا خط می‌زنیم.*

۳. *عدد بعدی (یعنی ۳) که اوّل است را نگه داشته و تمام مضارب آنرا خط می‌زنیم.*

این کار را تا آخرین عدد اوّل نابیشتر از $\sqrt{n}$ ادامه می‌دهیم. باقی اعداد همگی اوّلند و دقیقاً اعداد اوّل بین ۱ تا n خواهند بود.

[9] Sieve of Eratosthenes

مثال ۴.۲. *می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا ۳۱۳ اوّل است یا مرکب؟ برای این کار می‌نویسیم*

$$\begin{aligned} ۲۸۹ < ۳۱۳ < ۳۲۴ &\Longrightarrow ۱۷ < \sqrt{۳۱۳} < ۱۸ \\ &\Longrightarrow \left\{p \in \mathbb{P} : p \leqslant \sqrt{۳۱۳}\right\} = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷\}. \end{aligned}$$

هیچکدام از اعداد مجموعهٔ اخیر ۳۱۳ را نمی‌شمارد. لذا ۳۱۳ عددی اوّل است.

همانطور که در مثال بالا می‌بینیم، برای اجرای عملی آزمون اوّل بودن اراتستن لازم است تا بخشپذیری بر اعداد اوّل را تشخیص بدهیم. چنین کاری در برخی موارد عملی دیگر نیز لازم می‌آید.

۳.۲ قواعد بخش‌پذیری برای تمام اعداد اوّل

بخش‌پذیری بر ۲ و ۵ بر اساس رقم یکان قابل تشخیص است. عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکانش ۰، ۲، ۴، ۶ و یا ۸ باشد. همچنین عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکانش ۰ و یا ۵ باشد. ۲ و ۵ تنها اعداد اوّلی هستند که بخش‌پذیری n بر آنها تنها بر اساس رقم یکان n قابل تشخیص است. در آزمون بخش‌پذیریِ n بر سایر اعداد اوّل تمام ارقام عدد n مشارکت موثّر دارند. علی‌رغم وجود آزمونهای پراکنده برای بخش‌پذیری بر اعداد اوّل مختلف، روشی واحد برای تمام آنها مطلوب و مفید است. در اینجا روشی برای بخش‌پذیری برای تمام اعداد اوّل p به جز ۲ و ۵ ارائه می‌کنیم. برای تبیین این روش، برای هر $a \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم $\mathrm{ud}(a)$ نشانگر رقم یکان[۱۰] عدد a باشد. توجّه می‌کنیم برای تمام اعداد اوّل p به جز ۲ و ۵، داریم

$$\mathrm{ud}(p) \in \{۱, ۳, ۷, ۹\}.$$

قضیه ۵.۲. *فرض کنید p عددی اوّل به جز ۲ و ۵ است. قرار می‌دهیم*

$$t(p) = \begin{cases} \frac{p-۱}{۱۰}, & \mathrm{ud}(p) = ۱, \\ \frac{۷p-۱}{۱۰}, & \mathrm{ud}(p) = ۳, \\ \frac{۳p-۱}{۱۰}, & \mathrm{ud}(p) = ۷, \\ \frac{۹p-۱}{۱۰}, & \mathrm{ud}(p) = ۹. \end{cases}$$

در این صورت عددی بر p بخش‌پذیر است که اگر $t(p)$ برابر رقم یکان آنرا از باقی عدد کم کنیم، حاصل بر p بخش‌پذیر باشد.

مثال ۶.۲. *برای $p = ۱۳$ داریم $t(۱۳) = ۹$. در نتیجه «عددی بر ۱۳ بخش‌پذیر است که اگر ۹ برابر رقم یکان آنرا از باقی عدد کم کنیم، حاصل بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد». مثلاً برای ۸۹۷ داریم*

$$۸۹ - ۹ \times ۷ = ۲۶.$$

چون ۲۶ بر ۱۳ بخش‌پذیر است لذا ۸۹۷ نیز بر ۱۳ بخش‌پذیر می‌باشد.

مثال ۷.۲. *آزمون بخش‌پذیری بر عدد اوّل ۶۴۱ را بیان کرده و با کمک این آزمون بررسی می‌کنیم آیا عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است یا خیر. برای انجام اینکار، توجه می‌کنیم که $۶۴ = \frac{۶۴۱-۱}{۱۰} = t(۶۴۱)$. لذا «عددی بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است که اگر ۶۴ برابر رقم یکان آنرا از باقی عدد کم کنیم، حاصل بر ۶۴۱ بخش‌پذیر باشد». با اعمال مکرّر این قاعده بر عدد*

[10] Unit Digit

۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
۴۲۹۴۹۶۷۲۹ - ۷ \times ۶۴ &= ۴۲۹۴۹۶۷۲۹ - ۴۴۸ = ۴۲۹۴۹۶۲۸۱,\\
۴۲۹۴۹۶۲۸ - ۱ \times ۶۴ &= ۴۲۹۴۹۶۲۸ - ۶۴ = ۴۲۹۴۹۵۶۴,\\
۴۲۹۴۹۵۶ - ۴ \times ۶۴ &= ۴۲۹۴۹۵۶ - ۲۵۶ = ۴۲۹۴۷۰۰,\\
۴۲۹۴۷۰ - ۰ \times ۶۴ &= ۴۲۹۴۷۰ - ۰ = ۴۲۹۴۷۰,\\
۴۲۹۴۷ - ۰ \times ۶۴ &= ۴۲۹۴۷ - ۰ = ۴۲۹۴۷,\\
۴۲۹۴ - ۷ \times ۶۴ &= ۴۲۹۴ - ۴۴۸ = ۳۸۴۶,\\
۳۸۴ - ۶ \times ۶۴ &= ۳۸۴ - ۳۸۴ = ۰,
\end{aligned}$$

و چون ۰ بر ۶۴۱ *بخش‌پذیر است، لذا* ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ *نیز بر* ۶۴۱ *بخش‌پذیر می‌باشد.* (*توجّه کنید که* $۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۲^{۲^۵} + ۱$)

۴.۲ روش تجزیهٔ اعداد بزرگ و آزمون اوّل بودن فرما

بخشپذیری بر اعداد اوّل علاوه بر کاربردش در آزمون اوّل بودن اراتستن، در اجرای عملی قضیهٔ اساسی حساب نیز مفید است، یعنی زمانی که بخواهیم عدد طبیعی داده شده را به حاصلضرب اعداد اوّل تجزیه کنیم. با اینحال، اگر عوامل اوّل عددی که قرار است تجزیه شود بزرگ باشند کار تجزیه دشوار می‌شود.[11] در چنین مواردی اگر بتوان عدد داده شده را به ضرب عوامل کوچکتر (نه لزوماً اوّل) تجزیه کرد، می‌توان اندکی از پیچیدگی کار کاست. روش فرما [12] برای تجزیهٔ اعداد بزرگ در این مورد می‌تواند مفید باشد. اساس بررسی درستی روش و کارکرد آن اتّحاد مزدوج است.[13]

لم ۸.۲. *فرض کنید n عددی فرد باشد. در این صورت n را می‌توان به دو عامل (نه لزوماً اوّل) تجزیه کرد، اگر و تنها اگر بتوان n را به صورت تفاضل دو مربع نوشت.*

اثبات. اگر n را به دو عامل (نه لزوماً اوّل) تجزیه کرده باشیم می‌توان نوشت $n = ab$. با استفاده اتّحاد مربع جمع و تفاضل دو جمله داریم

$$n = \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲,$$

و البتّه حواسمان هست که چون هر دوی a, b فردند، لذا $a \pm b$ هر دو زوجند. برعکس، اگر بتوان n را به صورت تفاضل دو مربع نوشت آنگاه $n = x^۲ - y^۲$ و در نتیجه $n = (x-y)(x+y)$، و لذا n را می‌توان به دو عامل (نه لزوماً اوّل) تجزیه کرد. □

نتیجه ۹.۲. (*روش فرما برای تجزیهٔ اعداد بزرگ*) *این روش بر اساس لم بالا کار می‌کند، به این صورت که بر طبق لم اگر بتوانیم n را به صورت $n = x^۲ - y^۲$ بنویسیم، تجزیه انجام شده است. چون $۰ \geqslant y^۲$ ،$x^۲ - n = y^۲$، لذا $x \geqslant \sqrt{n}$. اگر $x = \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ آنگاه n مربع کامل است و $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$ تجزیه‌ای برای n. در غیراینصورت $x > \sqrt{n}$ و x را مقادیر طبیعی بزرگتر از $\sqrt{n}$ قرار داده و مقدار $x^۲ - n$ را محاسبه می‌کنیم. هر زمان که به عددی مربع کامل مانند $y^۲$ رسیدیم، کار تمام شده است.*

---

[11] هرچند همین دشواری هم در ریاضیات مفید شناخته می‌شود، زیرا مبنای ساخت و طراحی برخی از سیستمهای امنیتی رمزنگاری می‌گردد. در واقع هرقدر تجزیه دشوارتر باشد، کلید رمز ساخته شده بر پایهٔ آن امن‌تر خواهد بود، و این یعنی تبادل پیامها و اطلاعات در امنیت انجام می‌شود.

[12] Pierre de Fermat (1601-1665)

[13] اتّحاد مزدوج بیان می‌کند که برای تمامی اعداد حقیقی a, b داریم $a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$. این البته حالت خاصی از اتّحاد مزدوج اصلی است که بیان می‌کند برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + a^{n-۳}b^۲ + \cdots + a^۲b^{n-۳} + ab^{n-۲} + b^{n-۱}\right).$$

نکتهٔ مهم در روش بالا اینست که نهایتاً به ازای $x = \frac{n+۱}{۲}$، در $y = \frac{n-۱}{۲}$ به عدد مربع کامل می‌رسیم، چون همواره داریم

$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲ - n = \left(\frac{n-۱}{۲}\right)^۲ .$$

در واقع اگر در حالت مرزی بالا به مربع کامل برسیم، آنگاه تجزیهٔ مربوط به شکل $n = n \times ۱$ خواهد بود که نشان از اوّل بودن n خواهد داشت. این حقیقت را به صورت رسمی‌تر در زیر بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱۰.۲. *(آزمون اوّل بودن فرما) فرض کنید n عددی فرد باشد و برای تمام اعداد طبیعی x با شرط $\sqrt{n} \leqslant x < \frac{n+۱}{۲}$ تفاضل $x^۲ - n$ مربع کامل نباشد. در این صورت n عددی اوّل است.*

مثال ۱۱.۲. *برای تجزیهٔ $n = ۲۵۷۲۸۰۷$ به روش فرما، مشاهده می‌کنیم که*

$$۱۶۰۳ < \sqrt{n} \leqslant ۱۶۰۴.$$

با قرارِ $x = ۱۶۰۴$ می‌بینیم که $x^۲ - n = ۹ = ۳^۲$ که مربع کامل است. لذا

$$n = ۱۶۰۴^۲ - ۳^۲ = ۱۶۰۱ \times ۱۶۰۷.$$

هر دو عامل به دست آمده اوّل بوده و همانطور که می‌بینید بسیار به هم نزدیکند. به همین سبب روش به سرعت به انتها رسید. موارد زیر نیز از همین قبیل هستند:

$$۲۰۲۱ = ۴۳ \times ۴۷, \qquad ۲۳۱۰۳۷ = ۴۶۳ \times ۴۹۹.$$

مثال ۱۲.۲. *در مقایسه با نمونه‌های بالا، حال $n = ۱۳۹۱$ را درنظر می‌گیریم، که عدد نسبتاً کوچکتری است. داریم $۳۷ < \sqrt{n} \leqslant ۳۸$، و لذا الگوریتم از $x = ۳۸$ با محاسبهٔ $x^۲ - ۱۳۹۱$ آغاز می‌شود. پس از محاسبات طولانی (و طی بیش از بیست مرحله) می‌بینیم که بالاخره برای $x = ۶۰$ تفاضل مذکور مربع کامل می‌شود. در واقع داریم $۶۰^۲ - ۱۳۹۱ = ۴۷^۲$. در نتیجه*

$$۱۳۹۱ = ۶۰^۲ - ۴۷^۲ = ۱۳ \times ۱۰۷.$$

هر دو عامل به دست آمده اعداد اوّل بوده و البتّه از هم دورند، و به همین علّت روش پس از طی مراحل بسیار به انتها رسید. این وضع درباره اعداد اوّل بدتر نیز می‌شود. لذا بررسی اوّل بودن اعداد به روش فرما مستلزم محاسبات طولانی است، و در عمل کاربردی نمی‌باشد.

۵.۲ اعداد اوّل فرما

به نظر می‌رسد یکی از انگیزه‌های فرما برای ابداع روش تجزیهٔ اعداد بزرگ، که در بخش قبل شرح دادیم، تجزیهٔ عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ بوده است. این عدد متعلّق به دستهٔ خاصی از اعداد است که بعدها اعداد فرما نام گرفتند. حکم زیر خواستگاه اوّلیهٔ این اعداد را تشریح می‌کند.

لم ۱۳.۲. *فرض کنید $a, m > ۱$ و $a^m + ۱$ عددی اوّل باشد. در اینصورت a عددی زوج و $m = ۲^n$ است، که در آن $n \in \mathbb{N}$.*

اثبات. توجّه می‌کنیم که $۵ = ۱ + ۲^۲ \leqslant a^m + ۱$. اگر a فرد باشد آنگاه a^m فرد و لذا $a^m + ۱$ زوج است، و این با فرض اوّل بودنش مغایرت دارد. پس a باید زوج باشد. دربارهٔ m، اگر به شکلی که ادعا شده است نباشد آنگاه لزوماً دارای عامل فردی چون $s \geqslant ۳$ است. یعنی $m = ns$. در نتیجه

$$a^m + ۱ = a^{ns} + ۱ = (a^n + ۱)\left(a^{n(s-۱)} - a^{n(s-۲)} + \cdots - a^n + ۱\right).$$

از آنجائیکه $s \geqslant ۳$ لذا هر دو عامل در تجزیهٔ بالا بزرگتر از واحد می‌باشد، و این با فرض اوّل بودن $a^m + ۱$ در تناقض است. بنابراین m عامل فردی نداشته و به شکل $m = ۲^n$ است که در آن $n \in \mathbb{N}$. اثبات کامل است. □

ساده‌ترین انتخاب برای a در لم بالا $a=۲$ است. در این صورت ممکن است اعداد به شکل $۲^{۲^n}+۱$ اوّل باشند. فرما بررسی اوّل بودن این اعداد را که بعدها با F_n نشان داده شدند آغاز کرد. در جدول زیر مقادیر آغازین

$$F_n = ۲^{۲^n}+۱$$

را محاسبه کرده‌ایم.

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
F_n	۳	۵	۱۷	۲۵۷	۶۵۵۳۷	۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷

جدول ۱: اعداد فرما، که پنج‌تای نخست اوّلند

فرما توانست اوّل بودن همهٔ F_nهای مذکور در جدول بالا به جز $F_۵$ را اثبات کند. وی بلافاصله ادعا کرد که نه تنها $F_۵$، بلکه تمامی اعداد تولید شده توسط رابطهٔ F_n برای $n\geqslant ۰$ اوّلند.

دیری نپایید که اویلر [۱۴] ثابت کرد $F_۵$ اوّل نیست و حدس فرما را رد کرد. با توسعهٔ تحقیقاتش در این زمینه، اویلر در حالت کلّی‌تر ثابت کرد که اگر F_n بر عدد اوّل p بخشپذیر باشد آنگاه $p=۲^{n+۲}k+۱$ است که در آن $k\in\mathbb{N}$. با استفاده از همین واقعیّت، او مرکب بودن اعداد فرمای $F_{۹۴۴۸}$ و $F_{۲۳۴۷۱}$ را نیز اثبات کرد. توجّه کنید که اعداد فرما به سرعت رشد کرده و بزرگ می‌شوند، و لذا بررسی اوّل بودنشان بسیار دشوار است. با اینجال آزمون اوّل بودن ویژه‌ای برای این اعداد، موسوم به آزمون پپین[۱۵]، ابداع شده است که تا حدی کار را راحت می‌کند. در زیر اثباتی آسان برای اوّل نبودن $F_۵$ می‌آوریم. این اثبات تنها از اتّحاد مزدوج استفاده می‌کند.

گزاره ۱۴.۲. *عدد* $F_۵=۲^{۲^۵}+۱=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$ *بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.*

اثبات. قرار می‌دهیم $a=۲^۷$ و $b=۵$. داریم $۱+ab=۶۴۱$ و $۱+ab-b^۴=۲^۴$. بنابراین، بدون محاسبهٔ مستقیم $F_۵$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
F_۵ &= ۲^{۲^۵}+۱ = ۲^{۳۲}+۱ = (۲^۸)^۴+۱ = (۲a)^۴+۱\\
&= ۲^۴a^۴+۱ = (۱+ab-b^۴)a^۴+۱ = (۱+ab)a^۴+(۱-a^۴b^۴)\\
&= (۱+ab)a^۴+(۱-a^۲b^۲)(۱+a^۲b^۲)\\
&= (۱+ab)a^۴+(۱-ab)(۱+ab)(۱+a^۲b^۲)\\
&= (۱+ab)\left(a^۴+(۱-ab)(۱+a^۲b^۲)\right)\\
&= (۱+ab)\left(a^۴-a^۳b^۳+a^۲b^۲-ab+۱\right).
\end{aligned}$$

در نتیجه $۶۴۱=ab+۱$ عاملی (اوّل) برای $F_۵$ است. □

توّجه کنید که در مثال ۷.۲ بخش‌پذیری $F_۵$ بر ۶۴۱ را ثابت کردیم. این زمانی محقّق شد که می‌دانستیم ۶۴۱ عامل اوّلی برای $F_۵$ است، درحالیکه در گزارهٔ بالا با تکنیکهای ساده‌ای این عامل را برای $F_۵$ استخراج کردیم. مضاف بر اینکه در انتهای اثبات، عامل دیگر $F_۵$، یعنی

$$a^۴-a^۳b^۳+a^۲b^۲-ab+۱=۶۷۰۰۴۱۷,$$

[14] Leonhard Euler (1707-1783)
[15] Pépin’s Primality Test

به دست آمد که خود عدد اوّل می‌باشد. بنابراین

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417.$$

محاسبات کامپیوتری نشان می‌دهند که

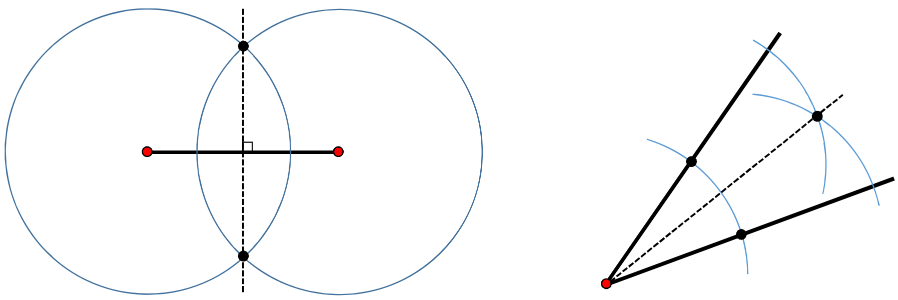
$$\begin{aligned} F_6 &= 2^{2^6} + 1 = 2^{64} + 1 \\ &= 18446744073709551617 \\ &= 274177 \times 67280421310721, \\ F_7 &= 2^{2^7} + 1 = 2^{128} + 1 \\ &= 340282366920938463463374607431768211457 \\ &= 59649589127497217 \times 5704689200685129054721. \end{aligned}$$

هرچند اویلر حدس فرما مبنی بر اوّل بودن تمامی جملات دنبالهٔ $(F_n)_{n \geqslant 0}$ را رد کرد، امّا وضعیّت این حدس بدتر از آن بود که تصوّر می‌شد. حتّی تا به امروز هیچ عدد اوّل فرمایی به جز همانهایی که خود فرما تشخیصشان داده است پیدا نشده و تلاشها در این حوزه کماکان ادامه دارد. امّا چرا؟

اوّل بودن اعداد فرما چه فایده‌ای دارد؟ برای پاسخ به این سوال لازمست به یک مبحث هندسی ورود پیدا کنیم. به زودی ارتباط فوق‌العادهٔ بین این بحث شیرین هندسی با حدس فرما و اعداد اوّلش روشن خواهد شد.

۶.۲ چندضلعی‌های منتظم ترسیم پذیر

فرآیند ترسیم موضوعات هندسی با خطکش غیر مدرّج و پرگار از دیرباز مورد توجّه بوده، و از زمان ریاضیات یونان باستان با دقّت علمی مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۵: ترسیم نیمساز زاویه (راست) و ترسیم عمود منصّف (چپ)

با استفاده از خطکش غیر مدرّج و پرگار می‌توان ترسیمات زیر را انجام داد:

۱. ترسیم عمود منصّف بر پاره‌خط مفروض.

۲. ترسیم نیمساز زاویه مفروض.

۳. ترسیم خط عمود بر خطی مفروض از نقطه‌ای مشخص خارج از آن.

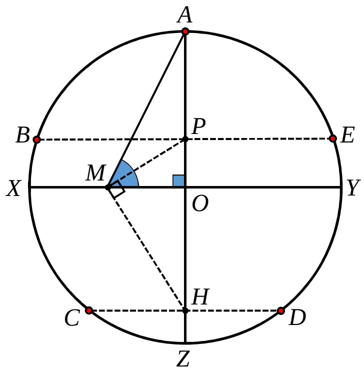
۴. ترسیم خط موازی با خطی مفروض از نقطه‌ای مشخص خارج از آن.

با بکار بستن ترسیمات مقدّماتی بالا می‌توان با استفاده از خطکش غیر مدرّج و پرگار، سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) و چهار ضلعی منتظم (مربّع) رسم کرد. سوالی که بطور طبیعی به ذهن می‌رسد اینست که آیا می‌توان با خطکش غیر مدرّج و

پرگار پنج ضلعی منتظم نیز رسم کرد؟ پاسخ این پرسش مثبت است، و روشهای متعدّدی برای اجرای آن وجود دارد. یکی از این روشها که بیان ساده‌ای دارد منتسب به ریچموند[۱۶] است.

۱.۶.۲ روش ریچموند برای ترسیم پنج ضلعی منتظم

این روش را بر اساس شکل زیر توضیح می‌دهیم. نقطهٔ A را روی دایره به مرکز O مشخص می‌کنیم. قطر AZ گذرا از A و همچنین قطر XY قائم بر AZ را رسم می‌کنیم. M را نقطهٔ وسط شعاع OX انتخاب و A را به M وصل می‌کنیم. نیمساز زاویهٔ AMO را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا شعاع OA را در نقطهٔ P قطع کند. همچنین خط عمود بر MP رسم می‌کنیم تا شعاع OZ را در نقطهٔ H قطع کند. حال خطوط گذرا از نقاط P و H و موازی قطر XY را رسم می‌کنیم تا دایره را به ترتیب در نقاط B و E، و همچنین C و D قطع کنند. پنج نقطهٔ A، B، C، D و E رئوس یک پنج ضلعی منتظم هستند.



شکل ۶: روش ریچموند برای ترسیم پنج ضلعی منتظم

مسلّماً با نیمساز کردن زوایای مرکزی هر nــ ضلعی منتظم رسم شده می‌توان به یک ۲nــ ضلعی منتظم رسید. به همین ترتیب به ۴nــ ضلعی منتظم، ۸nــ ضلعی منتظم، ۱۶nــ ضلعی منتظم، و بطور کلّی به یک n ۲^{k}ــ ضلعی منتظم رسید ($k \geqslant$ ۰).

بنابراین چون رسم مربّع را در اختیار داریم، می‌توانیم هر ۲^{k}ــ ضلعی منتظم ($k \geqslant$ ۲) را با استفاده از خطکش غیر مدرّج و پرگار ترسیم کرد. همچنین چون مثلث متساوی‌الاضلاع را رسم کرده‌ایم، می‌توانیم با نیمساز کردن زوایای مرکزی به ۶ــ ضلعی منتظم، ۱۲ــ ضلعی منتظم، ۲۴ــ ضلعی منتظم، و بطور کلّی به یک ۲^k × ۳ــ ضلعی منتظم رسید ($k \geqslant$ ۰). همین وضعیت دربارهٔ ۵ــ ضلعی منتظم، ۱۰ــ ضلعی منتظم، ۲۰ــ ضلعی منتظم، و بطور کلّی برای هر ۲^k × ۵ــ ضلعی ($k \geqslant$ ۰) برقرار است. سوال اساسی در اینجا اینست که

«کدام nــ ضلعی‌های منتظم را با استفاده از خطکش غیر مدرّج و پرگار می‌توان ترسیم کرد؟»

اگر فرآیند نیمساز کردن زوایای مرکزی و رسیدن به دوبرابر اضلاع را بدیهی انگاریم، سوال پایه‌ای‌تر اینست که برای nهای فرد کدام nــ ضلعی‌های منتظم را با استفاده از خطکش غیر مدرّج و پرگار می‌توان ترسیم کرد؟

۲.۶.۲ طبقه‌بندی چندضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر

همانطور که در بالا اشاره کردیم تاکنون هیچ عدد اوّل فرمایی به جز همانهایی که خود فرما تشخیصشان داده بود پیدا نشده است. حال می‌توان به این پرسش پرداخت که اوّل بودن اعداد فرما چه فایده‌ای دارد؟ پاسخ این سوال را گاوس[۱۷] با بدست آوردن شرط کافی برای ترسیم‌پذیری ارائه کرد. بعد کار وی توسط وَنزل[۱۸] با اثبات لازم بودن شرط ارائه شده توسط گاوس برای

[16] Herbert William Richmond (1863-1948)
[17] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
[18] Pierre Laurent Wantzel (1814-1848)

ترسیم‌پذیری تکمیل شد. در واقع احکام گاوس و ونزل روی چندضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر با خطکش (غیر مدرّج) و پرگار، جانی دوباره به حدس فرما بخشید.

قضیه ۱۵.۲. (*گاوس ــ ونزل*) *nــ ضلعی منتظم ترسیم‌پذیر با خطکش غیر مدرّج و پرگار است اگر و تنها اگر $n = ۲^k$، یا $n = ۲^k F_۰ F_۱ F_۲ \ldots F_r$ باشد، که در آن $k \geqslant ۰$ و F_jها اعداد اوّل فرمای متمایز هستند.*

تا به امروز تنها اعداد اوّل فرمای شناخته شده $۳, ۵, ۱۷, ۲۵۷, ۶۵۵۳۷$ هستند، و مشخص نیست آیا عدد فرمای اوّل دیگری وجود دارد یا خیر!؟ هرچند، تحقیقات انجام شده در این زمینه مشخص کرده است که به احتمال قوی تنها اعداد اوّل فرمای شناخته شده همین پنج عدد باشند. لذا در حال حاضر پاسخ سوال پایه‌ای‌تر که برای nهای فرد کدام nــ ضلعی‌های منتظم را با استفاده از خطکش غیر مدرّج و پرگار می‌توان ترسیم کرد، عبارتست از اعداد مذکور و حاصل‌ضربهای مختلف آنها با عوامل متمایز، که جمعاً ۳۱ عدد می‌باشند. تعدادی از این اعداد را در زیر می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&۳\,(=F_۰),\, ۵\,(=F_۱),\, ۱۷\,(=F_۲),\, ۲۵۷\,(=F_۳),\, ۶۵۵۳۷\,(=F_۴),\\
&۱۵\,(=F_۰F_۱),\, ۵۱\,(=F_۰F_۲), \ldots,\, ۱۶۸۴۳۰۰۹\,(=F_۳F_۴),\\
&۲۵۵\,(=F_۰F_۱F_۲),\, ۳۸۵۵\,(=F_۰F_۱F_۳) \ldots,\, ۲۸۶۳۳۱۱۵۳\,(=F_۲F_۳F_۴),\\
&۶۵۵۳۵\,(=F_۰F_۱F_۲F_۳),\, ۱۶۷۱۱۹۳۵\,(=F_۰F_۱F_۲F_۴) \ldots,\, ۱۴۳۱۶۵۵۷۶۵\,(=F_۱F_۲F_۳F_۴),\\
&۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵\,(=F_۰F_۱F_۲F_۳F_۴).
\end{aligned}
$$

دقّت کنید که مثلاً نمی‌توان $۳ \times ۳ = ۹$ یا $۵ \times ۵ = ۲۵$ ضلعی‌های منتظم را با استفاده از خطکش غیر مدرّج و پرگار رسم کرد. متمایز بودن عوامل در حکم گاوس الزامی است.

۷.۲ قضیهٔ لژاندر برای تجزیهٔ فاکتوریلها

یکی از مواردی که در عمل تجزیه به عوامل اوّل را اجرا می‌کنیم، تجزیهٔ فاکتوریلهاست. طبق معمول، برای $n \in \mathbb{N}$ می‌نویسیم $n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n$، و قرار می‌دهیم $۰! = ۱$. به این ترتیب اگر $p \in \mathbb{P}$ و $p \leqslant n$، آنگاه $p|n!$. همچنین اگر $p > n$ آنگاه $p \nmid n!$. لذا وقتی $n!$ را به عوامل اوّل تجزیه می‌کنیم، تمام اعداد اوّل نابیشتر از n و فقط همین اعداد، در تجزیه ظاهر خواهند شد. قضیهٔ زیر توان دقیق این عوامل اوّل را با حجم پایینی از محاسبات تعیین می‌کند.

قضیه ۱۶.۲. (*قضیهٔ لژاندر*) *اگر $v_p(n!)$ نشانگر بزرگترین توان عدد اوّل p در تجزیهٔ $n!$ به عوامل اوّل باشد، آنگاه داریم*

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{p^\alpha}\right].$$

اثبات. توجّه می‌کنیم که $v_p(n!)$ برابر حاصلجمع تعداد مضارب نابیشتر از n اعداد $p^۱, p^۲, p^۳, \ldots$ است. $\square$

مثال ۱۷.۲. *برای درک محتوای اثبات بالا، بهتر است مثالی عددی را بررسی کنیم. فرض کنید می‌خواهیم $v_۲(۲۰!)$ را به دست آوریم. داریم*

$$۱۵! = ۱ \times \underline{۲} \times ۳ \times \underline{\underline{۴}} \times ۵ \times \underline{۶} \times ۷ \times \underline{\underline{\underline{۸}}} \times ۹ \times \underline{۱۰} \times ۱۱ \times \underline{\underline{۱۲}} \times ۱۳ \times \underline{۱۴} \times ۱۵ \times \underline{\underline{\underline{\underline{۱۶}}}} \times ۱۷ \times \underline{۱۸} \times ۱۹ \times \underline{\underline{۲۰}}.$$

زیر مضارب $۲^۱$ یک خط، زیر مضارب $۲^۲$ دو خط، زیر مضارب $۲^۳$ سه خط و زیر مضارب $۲^۴$ چهار خط کشیده‌ایم. اینها تمام مضارب موجود و ممکن از همهٔ توانهای ۲ هستند، و جمعشان برابر $۱۰ + ۵ + ۲ + ۱ = ۱۸$ است. لذا $v_۲(۲۰!) = ۱۸$، و با ادامهٔ روند برای سایر عوامل نتیجه می‌شود

$$۲۰! = (۲^{۱۸})(۳^۸)(۵^۴)(۷^۲)(۱۱^۱)(۱۳^۱)(۱۷^۱)(۱۹^۱) = ۲۴۳۲۹۰۲۰۰۸۱۷۶۶۴۰۰۰۰.$$

نتیجه ۱۸.۲. *فرض کنید $n \geqslant ۲$.*

۱. *در تجزیهٔ استاندارد $n!$ به عوامل اوّل، توانها سیر نزولی دارند.*

۲. *برای $p \in \mathbb{P}$ و $\sqrt{n} < p \leqslant n$ داریم $v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right]$.*

۳. *برای $p \in \mathbb{P}$ و $\frac{n}{۲} < p \leqslant n$ داریم $v_p(n!) = ۱$.*

۴. *تعداد صفرهای انتهاییِ $n!$ برابر است با $v_۵(n!)$.*

اثبات.

۱. فرض کنید $p, q \in \mathbb{P}$ و $p < q \leqslant n$. در این صورت برای $\alpha \in \mathbb{N}$ داریم

$$p^\alpha < q^\alpha \Rightarrow \frac{n}{p^\alpha} > \frac{n}{q^\alpha} \Rightarrow \left[\frac{n}{p^\alpha}\right] \geqslant \left[\frac{n}{q^\alpha}\right] \Rightarrow v_p(n!) \geqslant v_q(n!).$$

۲. چون $p > \sqrt{n}$، داریم $p^۲ > n$ و لذا $۱ > \frac{n}{p^۲} > ۰$. در نتیجه $\left[\frac{n}{p^۲}\right] = ۰$. همچنین با استفاده از بند ۲ از گزارهٔ ؟؟، برای $\alpha \geqslant ۳$ داریم

$$\left[\frac{n}{p^\alpha}\right] = \left[\frac{\frac{n}{p^۲}}{p^{\alpha-۲}}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p^۲}\right]}{p^{\alpha-۲}}\right] = \left[\frac{۰}{p^{\alpha-۱}}\right] = ۰.$$

در نتیجه $v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right]$.

۳. داریم

$$\frac{n}{۲} < p \leqslant n \Longleftrightarrow ۱ \leqslant \frac{n}{p} < ۲ \Longleftrightarrow \left[\frac{n}{p}\right] = ۱.$$

با استفاده مجدّد از بند ۲ گزارهٔ ؟؟، برای $\alpha \geqslant ۲$ نتیجه می‌شود

$$\left[\frac{n}{p^\alpha}\right] = \left[\frac{\frac{n}{p}}{p^{\alpha-۱}}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p^{\alpha-۱}}\right] = \left[\frac{۱}{p^{\alpha-۱}}\right] = ۱.$$

لذا $v_p(n!) = ۱$.

۴. هر صفر انتهایی به معنای یک عامل $۵ \times ۲ = ۱۰$ است. امّا چون $v_۲(n!) \geqslant v_۵(n!)$، لذا برای تولید عامل ۱۰ به مقدار کافی ۲ داریم. پس تعداد عوامل ۱۰ برابر $v_۵(n!)$، و همین مقدار برابر تعداد صفرهای انتهایی نیز است. اثبات کامل است. □

تبصره ۱۹.۲. *با درنظر گرفتن بندهای ۲ و ۳ نتیجهٔ بالا می‌توان فرآیند تجزیهٔ $n!$ را تا حدی سرعت بخشید. برای توضیح بیشتر، $۱۰۰!$ را به حاصلضرب عوامل اوّل تجزیه می‌کنیم. در تجزیهٔ $۱۰۰!$ تمام اعداد اوّل نابیشتر از ۱۰۰ حضور دارند. این اعداد را توسط غربال اراتستن به دست می‌آوریم، که عبارتند از*

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹, ۸۳, ۸۹, ۹۷.$$

چون $۵۰ = \frac{۱۰۰}{۲}$، بنا به بند ۳ از نتیجهٔ ۱۸.۲ توانهای اعداد $۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹, ۸۳, ۸۹, ۹۷$ در تجزیهٔ $۱۰۰!$ همگی برابر ۱ هستند. برای باقی عوامل p که $p > ۱۰ = \sqrt{۱۰۰}$، و عبارتند از $۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷$، بنا به بند ۳ از نتیجهٔ ۱۸.۲ داریم $v_p := v_p(۱۰۰!) = \left[\frac{۱۰۰}{p}\right]$. پس

$$v_{۱۱} = ۹,\ v_{۱۳} = ۷,\ v_{۱۷} = ۵,\ v_{۱۹} = ۵,\ v_{۲۳} = ۴,\ v_{۲۹} = ۳,\ v_{۳۱} = ۳,\ v_{۳۷} = ۲,\ v_{۴۱} = ۲,\ v_{۴۳} = ۲,\ v_{۴۷} = ۲.$$

در واقع وزن اصلی محاسبات بر روی اعداد اوّل p که $p \leqslant ۱۰ = \sqrt{۱۰۰}$ است قرار دارد. این اعداد که عبارتند از $۲, ۳, ۵, ۷$، هرچند تعدادشان کم است، ولی از مجموع تمام توانها سهم زیادی دارند. با اینحال با درنظر گرفتن اینکه

$$\left[\frac{n}{p^{\alpha+۱}}\right] = \left[\frac{\frac{n}{p^\alpha}}{p}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]}{p}\right],$$

می‌توان جمعوندهای $v_p(n!)$ را برای این اعداد اوّل با یک فرآیند کاهشی و با تقسیمات متوالی بر p، آسانتر محاسبه کرد. به عنوان مثال، در محاسبهٔ $v_2 := v_2(100!)$ داریم

$$v_2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left[\frac{100}{2^\alpha}\right] = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right] + \left[\frac{100}{128}\right] + \cdots$$
$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0 + \cdots = 97.$$

توضیح اینکه در محاسبهٔ جمعوندها در محاسبهٔ $v_2 = v_2(100!)$ اینگونه عمل کردیم

$$\left[\frac{100}{2}\right] = 50 \to \left[\frac{50}{2}\right] = 25 \to \left[\frac{25}{2}\right] = 12 \to \left[\frac{12}{2}\right] = 6 \to \left[\frac{6}{2}\right] = 3 \to \left[\frac{3}{2}\right] = 1 \to \left[\frac{1}{2}\right] = 0.$$

این زنجیره حتماً به صفر منتهی شده و در عمل تعداد جمعوندها متناهیست (تبصرهٔ بعد را ببینید). همچنین با بزرگتر شدن پایه زنجیره کوتاه‌تر شده و سریعتر خاتمه می‌پذیرد. مثلاً در محاسبهٔ $v_3 := v_3(100!)$ زنجیرهٔ جمعوندها عبارتست از

$$\left[\frac{100}{3}\right] = 33 \to \left[\frac{33}{3}\right] = 11 \to \left[\frac{11}{3}\right] = 3 \to \left[\frac{3}{3}\right] = 1 \to \left[\frac{1}{3}\right] = 0.$$

لذا $v_3 = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$. همچنین زنجیرهٔ جمعوندها در محاسبهٔ $v_5 := v_5(100!)$ عبارتست از

$$\left[\frac{100}{5}\right] = 20 \to \left[\frac{20}{5}\right] = 4 \to \left[\frac{4}{5}\right] = 0.$$

بنابراین $v_5 = 20 + 4 = 24$، که برابر تعداد صفرهای انتهاییِ $100!$ نیز است. زنجیرهٔ جمعوندها در محاسبهٔ $v_7 := v_7(100!)$ عبارتست از

$$\left[\frac{100}{7}\right] = 14 \to \left[\frac{14}{7}\right] = 2 \to \left[\frac{2}{7}\right] = 0.$$

بنابراین $v_7 = 14 + 2 = 16$. با جمعبندی اطلاعات بدست آمده نتیجه می‌گیریم

$$100! = (2^{97})(3^{48})(5^{24})(7^{16})(11^{9})(13^{7})(17^{5})(19^{5})(23^{4})(29^{3})(31^{3})(37^{2})(41^{2})$$
$$(43^{2})(47^{2})(53^{1})(59^{1})(61^{1})(67^{1})(71^{1})(73^{1})(79^{1})(83^{1})(89^{1})(97^{1}).$$

با کمک کامپیوتر مشاهده می‌شود

$$100! = 93326215443944152681699238856266700490715968264381621$$
$$468592963895217599993229915608941463976156518286253697$$
$$920827223758251185210916864000000000000000000000000,$$

که عددی است با ۱۵۸ رقم.

۸.۲ نتیجه‌گیری و جمعبندی

شکل ۱.۲ تصویر توزیع اعداد اوّل در فاصلهٔ ۱ تا ۲۰۰۰۰ را نشان می‌دهد. در این تصویر فواصل بین اعداد اوّل متوالی و رخنه‌های بین آنها دیده می‌شود. زوجهایی از اعداد اوّل که تنها یک واحد رخنه بینشان وجود دارد را دوقلوهای اوّل[19] می‌نامند. چند دوقلوی اوّل آغازین عبارتند از

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103).$$

[19] Twin Primes

یکی از پرسشهای عمیق اینست که آیا نامتناهی دوقلوی اوّل وجود دارد؟ حدس زده می‌شود که پاسخ این سوال مثبت باشد. این حدس را «حدس اعداد اوّل دوقلو» می‌نامند. این حدس دربارهٔ «تکرار تمام‌نشدنیِ فاصلهٔ حداقلی بین اعداد اوّل» می‌باشد. حدس اعداد اوّل دوقلو می‌گوید که این مقدار حداقلی باید ۲ باشد. یکی از آخرین دست‌آوردهای بسیار مهم در این زمینه، که حاصل کار گروهی جمعی از برجسته‌ترین ریاضیدانهاست، تایید مقدار حداقلی ۲۴۶ است.

از این قبیل حقایق در داستان اعداد اوّل فراوان وجود دارد. حدس گلدباخ[20]، حدس ریمان[21] و موارد بسیاری که سالها فکر ریاضیدانها را به خود مشغول کرده است. مسلّماً بیان این حقایق در شنوندهٔ علاقه‌مند ایجاد هیجان علمی می‌کند، و همین هیجان می‌تواند در وی ایجاد شوق و علاقهٔ نماید. اعداد اوّل سرشار از شگفتی‌ها و اسرار سر به مُهر است. صحبت از اعداد اوّل برای سطوح مختلف دانش‌آموزان مقدور بوده، و رسیدن به مرزهای حل‌نشده در آن به سرعت قابل حصول می‌باشد. آنچه در این مقاله ارائه شد بخشی از سخنرانی‌های نگارنده در جمع معلّمان و دانش‌آموزان بود. گاهاً در بین همین جلسات بحثهای مفیدی صورت گرفته است، مانند قواعد بخش‌پذیری برای تمام اعداد اوّل در بخش ۳.۲، که در پاسخ به سوال و خواست یک معلّم گرامی توسط نگارنده آماده شد، و حاصل آن در مقالهٔ کوتاه [۱] منتشر خواهد شد.

مراجع

[1] M. Hassani, Tests for divisibility by prime numbers, *Mathematical Gazette*, to appear. 16

[2] D. M. Burton, *Elementary Number Theory* (Sixth Edition), McGraw-Hill, 2007.

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright, *A Introduction to the Theory of Numbers* (Sixth Edition, Edited by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman), Oxford University Press, 2008.

[4] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 2003.

[5] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive.*
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html`

[6] Wikipedia, *the free encyclopedia.*
`http://www.wikipedia.org/`

[7] Wolfram MathWorld, *The Web's Most Extensive Mathematics Resource.*
`http://mathworld.wolfram.com/`

[20] Goldbach Conjecture

[21] The Riemann Hypothesis

۳ آموزش مبحث فراکتال‌ها برای دانش آموزان متوسطه

محمدباقر کاظمی
هیات علمی دانشگاه زنجان

چکیده

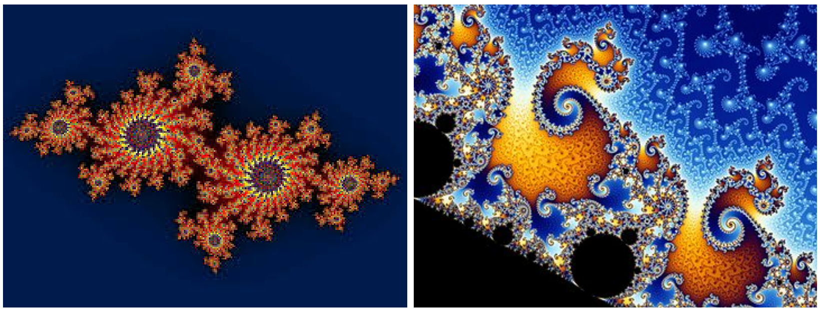
عوامل متعددی باعث شده است تا دانش‌آموزان در دبیرستان به رشته ریاضی–فیزیک گرایش پیدا نکنند و به طبع آن، رشته ریاضی نیز در دانشگاه با اقبال بسیار کمی مواجه شده است. آشنایی دانش‌آموزان و معلمان با مباحث به‌روز، جذاب، کاربردی در مورد ریاضیات و به کارگیری مدل‌سازی، اینترنت و نرم افزارها در این راستا می‌تواند ایجاد علاقه و انگیزه‌ی مضاعف نماید تا گرایش ها به رشته ریاضی افزون‌تر گردد. در این مقاله ضمن بررسی این موضوع، به معرفی یکی از مباحث نوین هندسه به نام فراکتال‌ها پرداخته، آن‌ها را از طریق به کارگیری الگوها و استدلال استقرایی و استنتاجی مطالعه می‌کنیم. در ادامه علاوه بر بیان کاربردها، نرم افزارهایی را نیز برای مدل‌سازی و بهره گیری بیشتر معرفی می‌نماییم.

۱.۳ مقدمه

آمارها حاکی از آن است که از اوایل دهه نود گرایش دانش‌آموزان در انتخاب رشته به سمت علوم تجربی بیشتر شده است به طوری که در کنکور سراسری سال ۹۷ بیش از ۶۳ درصد شرکت کنندگان در رشته علوم تجربی بوده است. دلایل مختلفی از جمله بازار کار، پول‌ساز بودن رشته و ... از جمله عوامل این افزایش بوده و در نتیجه رشته ریاضی و فیزیک سال به سال متقاضیانش کمتر و کمتر گردیده است. به طبع این اتفاق گرایش به رشته‌های علوم پایه که موتور محرک اکثر علوم بشری است در ایران بسیار کم شده است و کسانی هم که به این رشته‌ها روی می‌آورند عموما از روی اجبار و ناچاری است و معمولا هم از سطح علمی و توانایی کمتری برخوردار هستند. این درحالی است که بر اساس آمار منتشر شده از سوی پایگاه استنادی علوم جهان اسلام (ISC) حضور رشته‌های علوم پایه در تولید علم کشورمان طی سال‌های گذشته روند صعودی داشته و تعداد مقاله‌های چاپ شده در این رشته‌ها افزایش یافته است. بنابراین نپرداختن به این موضوع و نیز بالا نبردن کیفیت علوم پایه در میان مدت و بلند مدت آسیبی جدی بر تولید علم کشورمان خواهد زد. بر اساس برخی تحقیقات صورت گرفته [۱] استفاده از مطالب جذاب، شهودی‌تر و کاربردی در جذب و ایجاد علاقه شناختی و هیجانی دانش‌آموزان تاثیر بسزایی دارد. به عنوان مثال برای جالب‌تر شدن یک مبحث علمی برای دانش‌آموزان جزئیات فریبنده، به عنوان چاشنی به بدنه‌ي مطالب علمی اضافه می‌شود. اصطلاح جزئیات فریبنده به مواد و اطلاعات فریبنده‌اي اشاره دارد که به محتواي آموزشی اضافه می‌شود تا این محتوا را براي یادگیرنده جذاب‌تر کند اما این مواد و مطالب براي هدف یادگیري می‌تواند غیرضروری باشد [۶]. از جمله در پژوهشی که نقش جزئیات فریبنده در یادگیري دروس علوم چند رسانه‌اي را بررسی کرده‌اند به این نتیجه رسیده‌اند که بیان مباحث جالب و حاشیه‌ای ولی با جذابیت بالای مربوط به درس باعث عملکرد بهتر و یادگیری با ماندگاری بیشتر و همین طور ایجاد علاقه شده است [۱]. از طرفی بهره‌گیری از روش آموزش فعال در تدریس ریاضی و به ویژه هندسه در پیشرفت تحصیلی، یادگیری، ایجاد علاقه و انگیزه دانش‌آموزان بسیار موثر است [۲]. با توجه به موارد فوق، جمعی از همکاران هیات علمی رشته ریاضی و دبیران ریاضی با همراهی دبیرستان‌های استعدادهای درخشان استان زنجان تصمیم به برگزاری دوره‌هایی به صورت کارسوق ریاضی در این دبیرستان‌ها، برای آموزش مطالب جذاب و کاربردی ریاضی برای دانش‌آموزان کردند تا ضمن ایجاد علاقه و انگیزه برای گرایش آن‌ها به رشته ریاضی و فیزیک، با طرح مسایل مختلف و جدید در بین دانش‌آموزان استعداد آن‌ها نیز کشف و شکوفا گردد. از جمله مباحث تدریس شده مطالعه‌ی فراکتال‌ها و کاربرد آن‌هاست که علاوه بر به کارگیری الگوها و استدلال استقرایی و استنتاجی در بررسی آن‌ها، از نرم افزارها نیز برای جذابیت و کارآیی بیشتر تدریس، استفاده شده است. بر اساس نظرسنجی که از دانش‌آموزان صورت گرفت این مطالب بسیار مورد استقبال قرار گرفته و حس کنجکاوی و حتی پژوهشگری آن‌ها را برای کسب اطلاعات بیشتر برانگیخته است. در بخش‌های بعدی طرح کلی از این مباحث جهت بهره‌مندی همکاران و مدرسان به صورت اجمالی ارائه می‌شود تا در صورت نیاز در کلاس‌ها، کارسوق‌ها و همایش‌ها مورد استفاده قرار گیرد.

۲.۳ فراکتال‌ها: ترسیم و بعد

در برخی علوم نوین و پدیده‌های جهان امروزی، هندسه کهن و پهناور اقلیدسی با تمام اهمیت و ابهتش پاسخگو و کافی نیست. در نتیجه هندسه‌های جدید و شاخه‌های بسیار جدیدی ابداع شده‌اند که اهمیت و کاربرد بسزایی در این مدت کم پیدا کرده‌اند. از جمله آن‌ها به سیستم‌های دینامیکی، نظریه آشوب و فراکتال‌ها می‌توان اشاره کرد. مواردی که با هندسه معمولی قابل توصیف نیست و در خود پویایی، پیچیدگی و پیش بینی ناپذیری خاصی نهفته دارند. در مطالعه گرد و غبار، رشد سلول‌های سرطانی، پیش بینی آب و هوا، بورس و اقتصاد، شبیه‌سازی‌های کامپیوتری، معماری و ... ردپای این علوم را می‌توان دید. فراکتال‌ها از دهه شصت میلادی معرفی و مورد بررسی قرار گرفتند. در این چند دهه و با این قدمت کم توانسته‌اند بسیار پرکاربرد و با اهمیت شوند. یک فراکتال دو ویژگی اصلی دارد: الف) خود متشابهی و تکرار شوندگی ب) بعد ناصحیح. خود متشابهی به این معناست که فراکتال‌ها از اجزایی تشکیل شده اند که هر کدام از این اجزا در مقیاس کوچک‌تر مشابه خود فراکتال هستند. برای درک مفهوم بعد، مثال‌های زیر را در نظر می‌گیریم. نقطه دارای بعد صفر، خط و منحنی (که طول غیر صفردارند) بعد یک، صفحه‌ای مستطیل شکل یا دایره‌ای (که مساحت غیر صفر دارند) بعد دو و مثلا کره یا مکعبی توپر (که حجم غیر صفر دارند) بعد سه دارند. اما در ادامه با فراکتال‌هایی آشنا می‌شویم و رسم می‌کنیم که بعد اعشاری ناصحیح دارند. به عنوان نمونه در شکل زیر، دو فراکتال معروف مندلبروت[۲۲] و جولیا[۲۳] را مشاهده می‌نمایید.

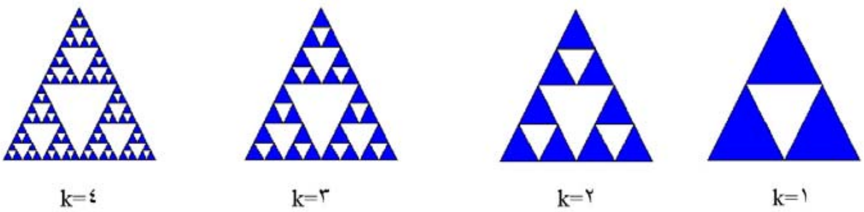


شکل ۷: فراکتال مندلبروت و فراکتال جولیا (از راست به چپ)

حال سعی می‌کنیم، چند فراکتال ساده را رسم کنیم و با الگویابی و استقرا نتیجه بگیریم که بعد صحیح ندارند.

۱.۲.۳ مثلث سرپینسکی

مثلث متساوی الاضلاع با ضلع واحد را در نظر می‌گیریم. نقاط وسط اضلاع را به هم وصل کرده در داخل هر مثلث چهار مثلث جدید متساوی الاضلاع به دست می‌آوریم. مثلث وسطی را حذف می‌کنیم. مثلثی که از نامتناهی تکرار این روند به دست می‌آید، فراکتال سرپینسکی است.



شکل ۸: مراحل ۱ تا ۴ تشکیل مثلث سرپینسکی

[22] Mandelbrot
[23] Julia

حال جدول زیر را برای مثلث‌های باقیمانده در هر مرحله شمرده و تکمیل می‌نماییم. سپس، با استقرا فرمول کلی آن را به دست می‌آوریم. در ادامه به کمک مقادیر به دست آمده برای مساحت و محیط و فرمول‌های مربوطه، بُعد این فراکتال را محاسبه نموده و ناصحیح بودن آن را نشان می‌دهیم.

مرحله	مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳	مرحله ۴	مرحله k
تعداد مثلث	۳	۹	۲۷	۸۱	۳^k
طول ضلع	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۲^k}$
محیط	$\frac{۹}{۲}$	$\frac{۲۷}{۴}$	$\frac{۸۱}{۸}$	$\frac{۲۴۱}{۱۶}$	$\frac{۳^{k+۱}}{۲^k}$
مساحت	$\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۶}$	$\frac{۹\sqrt{۳}}{۶۴}$	$\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲۵۶}$	$\frac{۸۱\sqrt{۳}}{۱۰۲۴}$	$\frac{۳^k\sqrt{۳}}{۲^{۲k}}$

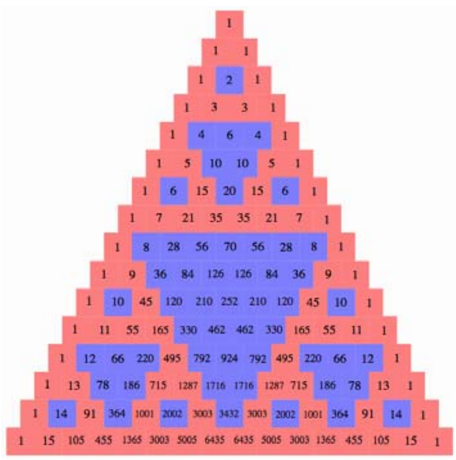
شکل ۹: جدول مربوط به مشخصات مثلث سرپینسکی

ملاحظه می‌شود که مساحت نهایی به سمت صفر و محیط آن به بینهایت میل می‌کند. بنابراین بعد این فراکتال باید عددی بین یک و دو باشد.

بعد خود تشابهی یک فراکتال، d، به این صورت به دست می‌آید که اگر N را تعداد اجزا نسبت به اجزای مرحله قبلی و r را مقیاس هر جزء نسبت به اجزای مرحله قبل در نظر بگیریم، بعد در رابطه‌ی صدق می‌کند [۳]. پس بعد این فراکتال برابر است با:

$$d = \frac{\log ۳}{\log ۲} = ۱٫۵۸۵.$$

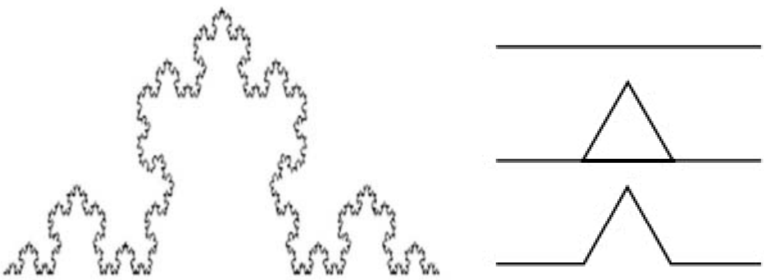
نکته جالب دیگر در مورد این مثلث این است که اگر مثلث خیام‌ــ پاسکال را نوشته و اعداد زوج آن را رنگ کنیم، به مرحله‌ای از مثلث سرپینسکی می‌رسیم که در شکل (۱.۲.۳) بخشی از آن دیده می‌شود.



شکل ۱۰: تشکیل مثلث سرپینسکی با اعداد زوج مثلث خیام‌ــ پاسکال

۲.۲.۳ منحنی کخ

یک پاره خط به طول واحد را در نظر بگیرید. آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و بر روی قسمت میانی یک مثلث متساوی الاضلاع رسم کرده و قاعده آن را حذف کنید. حال سه پاره خط با طول یکسان به دست می‌آید. بر روی تک‌تک پاره خطها این الگوریتم و روند را انجام دهید. اگر این روند تا مرحله بینهایت ادامه یابد فراکتال منحنی کخ حاصل می‌شود. همانند جدول مثلث سرپینسکی می‌توان برای مراحل مختلف تعداد پاره‌خطها و طول آن‌ها را محاسبه و یادداشت کرد. ملاحظه می‌شود که در مرحله kــ ام تعداد پاره‌خطها ۴^k و طول آن‌ها ۳^{-k} است. به کمک فرمولی که در بخش قبل معرفی شد بعد این فراکتال برابر با $d = \frac{\log ۴}{\log ۳} = ۱/۲۶$ است.



شکل ۱۱: مراحل تشکیل منحنی کخ

۳.۳ به کارگیری اینترنت و نرم‌افزار

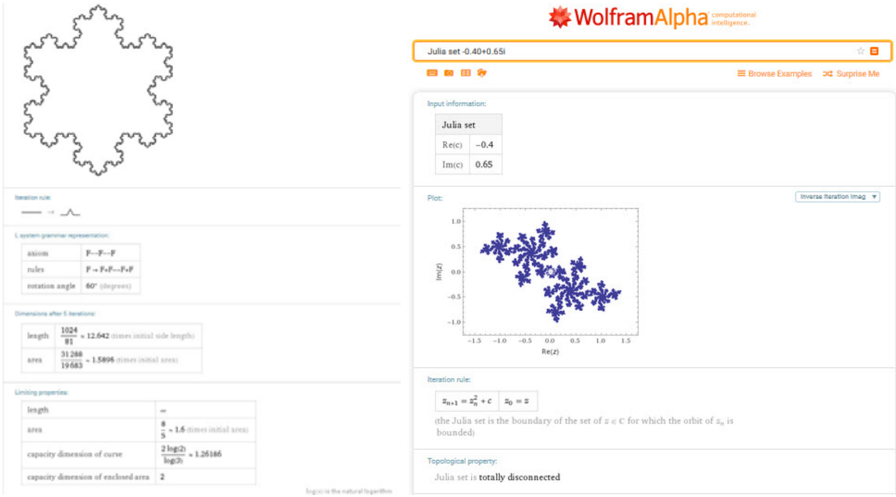
نرم افزارهای مختلفی برای کار درباره فراکتال‌ها موجود است، از نرم افزارهای تخصصی و کلی ریاضیاتی مانند Maple و Mathematica گرفته تا نرم افزارهای تخصصی فراکتال مانند Ultrafractal و BENOIT. ما در اینجا به چند نمونه به صورت مختصر اشاره می‌نماییم.

۱.۳.۳ نرم افزار Mathematica و سایت Wolframalpha

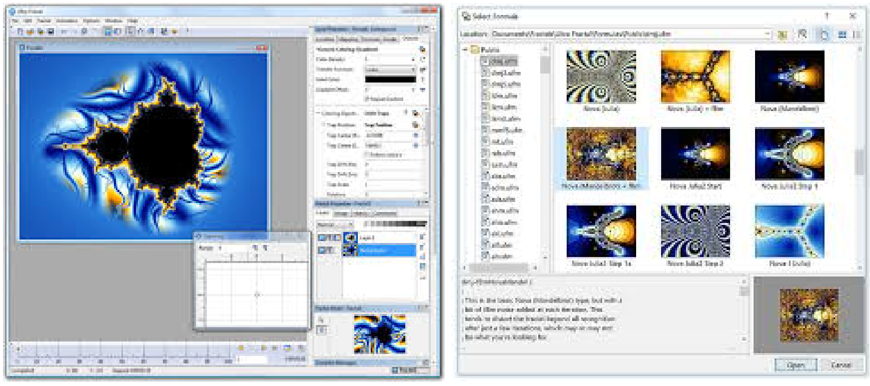
این نرم افزار یکی از قدرتمندترین نرم افزارهای ریاضی برای محاسبات و مدلسازیهای ریاضی است، که دستورات و پکیج‌های مختلفی در مورد فراکتال‌ها دارد. اما سایت آنلاین این نرم افزار با عنوان Wolframalpha نیز امکانات خوب و سهل الوصول‌تری در اختیار کاربران می‌گذارد [۷]. می‌توان فراکتال‌های مختلف را به ازای مرحله‌های معین رسم کرد، بعد آن‌ها را محاسبه نمود و اطلاعات متعددی در مورد آن‌ها به دست آورد. چون این سایت مثال‌هایی را خودش پیشنهاد و حل می‌کند، از پرداختن به جزییات آن خودداری می‌کنیم و فقط در شکل ۱.۳.۳ نمونه‌هایی از دو فراکتال را گنجانده‌ایم.

۲.۳.۳ نرم افزار Ultrafractal

یکی از نرم افزارهای تخصصی فراکتال‌ها که می‌توان به صورت رایگان از سایت آن با همین عنوان دانلود کرد، نرم افزار Ultrafractal است. این نرم افزار به‌ویژه برای دانش‌آموزان جذابیت‌های خوبی دارد. دانش‌آموزان می‌توانند فراکتال‌های مختلف، جالب و زیبایی را از دیتا بیس آن انتخاب نموده تا جایی که می‌توانند در شکل‌ها زوم کرده و فرایند خودمتشابهی و تکرار را ببینند، رنگ‌ها را تغییر و ترکیب نمایند، از فرآیند کارهایشان انیمیشن درست کنند و … . در این نرم افزار Toolbar بسیار مرتب و آسانی وجود دارد که کار کردن با آن را برای مبتدیان نیز مقدور ساخته است. در شکل زیر چند نمونه کار را با این نرم افزار ملاحظه می‌نمایید.



شکل ۱۲: نمونه فراکتال‌ها و محاسبات مربوط به آن‌ها در سایت Wolframalpha



شکل ۱۳: نمونه فراکتال‌ها و محاسبات مربوط به آن‌ها در نرم افزار Ultrafractal

۴.۳ کاربردها و نتایج

با دقت در طبیعت، نمونه‌هایی از فراکتال‌ها را می‌توان دید. در برگ‌های سرخس و کاج، در دانه‌های برف، در برخی گل کلم‌ها و غیره. در کارسوق‌های برگزار شده ما از دانش‌آموزان می‌خواهیم که به عنوان کاری عملی نمونه‌هایی از این‌ها را پیدا نمایند. علاوه بر طبیعت، امروزه فراکتال‌ها کاربرد زیادی در هنر، معماری و طراحی‌های کامپیوتری پیدا کرده است [۴]. با کمی جستجو می‌توان عکس‌هایی از این دست از آثار موجود در جهان پیدا کرد که در اینجا دو نمونه آورده شده است. در زمینه ساخت آنتن‌ها اخیرا عده‌ای از دانشمندان به ساخت آنتن‌های فراکتالی روی آورده‌اند و به کمک آن‌ها ابزارهای دقیقتر و کاراتری را ساخته‌اند. در پزشکی نیز در مطالعه سلول‌های سرطانی از شاخه سیستم‌های دینامیکی و فراکتال‌ها استفاده می‌شود و هم در زمینه‌های دیگری مثلا بررسی نوار قلب و مغز بیمار از الگوهای فراکتالی بهره می‌گیرند [۵].

آنچه بیان شد نمونه کوچکی بود از خواص فراکتال‌ها، نرم افزار و کاربردهای مربوطه که می‌توان برای دانش‌آموزان با اطلاعات دوره متوسطه بیان و ارائه کرد تا هم ضمن بالا بردن اطلاعات غیردرسی ریاضی، علاقه و کنجکاوی آن‌ها را در ریاضیات نوین برانگیخت و برای مطالعات بیشتر در سطح آموزش عالی به سمت گرایش ریاضی و فیزیک سوق داد. به‌ویژه با توجه به روحیه و امکانات دانش‌آموزان امروزی، استفاده از کامپیوتر و اینترنت در دروس آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. بنابراین نرم افزار و سایت‌های معرفی شده می‌تواند مفید واقع شود.

شکل ۱۴: نمونه فراکتال‌ها در طبیعت

مراجع

[۱] مریم تازش، حمیدرضا حسن‌آبادی و مریم کدبور، نقش جزئیات فریبنده در یادگیري درس علوم چندرسانه اي :اثرها بر بار شناختی وعملکرد، فصلنامه روانشناسی شناختی، دوره ۴، شماره۳، ۵۴ ـ ۶۵ (۱۳۹۵). ۱۷

[۲] ملوک حبیبی، نقش روش تدریس فعال معلمان در هندسه(با مدل ون هیلي) در افزایش انگیزش و یادگیري دانش آموزان، فصلنامه مشاوره شغلی و سازمانی، دوره پنجم، شماره ۱۴، ۸۴ ـ ۱۰۵ (۱۳۹۲). ۱۷

[۳] احمد روزی طلب، *مقدمه ای بر هندسه فراکتالی*، چاپ اول، انتشارات تخت جمشید ۱۳۸۹. ۱۹

[4] Y. Fisher (1995), Fractal Image Compression: Theory and Application, Springer Verlag, Berlin. 21

[5] A. G. Losa, D. Merlini, R. Weibel (2012), Fractals in Biology and Medicine, Birkhäuser. 21

[6] S. Harp, R. E. Mayer, (1997). Role of interest in learning from scientific text and illustration: On the distinction between emotional interest and cognitive interest, Journal of Educational Psychology, 89, pp 92-102. 17

[7] Wolfram MathWorld, *The Web's Most Extensive Mathematics Resource.* `http://mathworld.wolfram.com/` 20

۴ آموزش رنگ‌آمیزی گراف‌ها برای دانش‌آموزان متوسطه

فاطمه راعی
هیات علمی دانشگاه فرهنگیان

چکیده

کاهش چشم‌گیر تعداد دانش‌آموزان رشته ریاضی‌ـ فیزیک در دبیرستان و از طرفی اهمیت علوم پایه و مهندسی در صنعت و تکنولوژی، لزوم جذب دانش‌آموزان مستعد و با انگیزه به این رشته را مشخص می‌نماید. در این مقاله به معرفی مباحثی از نظریه گراف مانند رنگ‌آمیزی راسی، یالی و کلی گراف خواهیم پرداخت تا دانش‌آموزان ضمن یادگیری این مطالب، با کاربردهایی از ریاضیات در دنیای واقعی آشنا شوند.

۱.۴ مقدمه

بسیاری از دانش‌آموزان چه در مقطع ابتدایی و چه در مقطع دبیرستان بر این باور هستند که درس ریاضی کاربردی ندارد و قسمت اعظم مطالبی که در درس ریاضی یاد می‌گیرند، استفاده‌ای در زندگی روزمره آن‌ها ندارد. اما اگر بخواهیم این‌گونه بیاندیشیم که در درس‌هایی مانند ادبیات، جغرافی، تاریخ، فیزیک، زیست، شیمی و ... هم مطالب زیادی وجود دارد که در زندگی روزمره از آن‌ها استفاده‌ای نمی‌کنیم. پس آیا این درس‌ها را هم نباید یاد بگیریم؟ جهت علاقه‌مندسازی دانش‌آموزان، به ویژه در دوره اول متوسطه به درس ریاضی و رشته ریاضی، در دبیرستان دوره اول فرزانگان زنجان دوره‌هایی به صورت کارسوق ریاضی برای آموزش مطالب جذاب و کاربردی ریاضی به دانش‌آموزان برگزار گردید، تا ضمن ایجاد علاقه و انگیزه برای گرایش آن‌ها به رشته ریاضی‌ـ فیزیک در دوره دوم دبیرستان، با طرح مسائل مختلف و جدید در بین دانش‌آموزان استعدادهای ریاضی آن‌ها نیز کشف و شکوفا گردد. از جمله مباحث تدریس شده در این کارسوق، مبحث رنگ‌آمیزی‌های مختلف گراف‌ها و کاربردهای آن‌ها می‌باشد. این مباحث جهت بهره‌مندی همکاران و مدرسان ارائه می‌شود تا در صورت نیاز در کلاس‌ها، کارسوق‌ها و همایش‌ها مورد استفاده قرار گیرد.

۲.۴ نظریه گراف

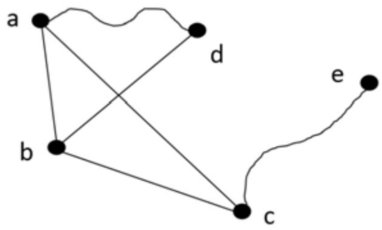
یک گراف، نمایشی تصویری از مجموعه اشیائی است که با هم ارتباط دارند. هر یک از این اشیا را «رأس» یا گره می‌نامند و با یک نقطه توپر در صفحه یا فضا نمایش می‌دهند، که می‌توان آن‌ها را با یکی از حروف الفبا نام‌گذاری هم کرد. برای نشان دادن ارتباط بین این اشیا، نقطه‌های متناظر آن‌ها را (معمولا با یک خط یا یک منحنی) به هم متصل می‌نمایند که این خطوط یا منحنی‌ها را «یال»ها می‌نامند. به عبارتی دیگر، گراف تعدادی نقطه است که با خطوطی به یک‌دیگر متصل شده‌اند.

به بیان دقیق‌تر، یک گراف از مجموعه‌ای غیرخالی از اشیاء به نام رأس تشکیل شده، که آن را با V نشان می‌دهیم، و مجموعه‌ای شامل یال‌ها، که رأس‌ها را به هم وصل می‌کنند و با E نشان می‌دهیم. یک چنین گرافی را با $G = (V, E)$ نمایش می‌دهیم.

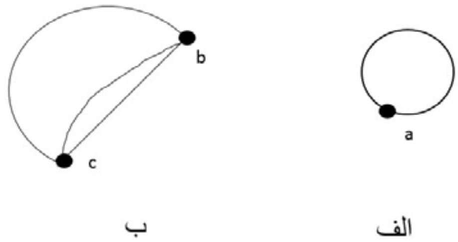
مثال ۱.۴. *گراف زیر که آن را G نامیده‌ایم، دارای مجموعه راس‌های $V = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{ab, ad, ac, bd, ce\}$ است.*

اگر در یک گراف، یک یال از یک راس شروع و به همان راس ختم شود، آن را حلقه می‌نامیم. همچنین اگر در گرافی بین دو راس بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن یال را یال چندگانه می‌نامیم.

در این مقاله در مورد گراف‌هایی صحبت می‌کنیم که حلقه یا یال چندگانه نداشته باشند، این نوع گراف‌ها را گراف‌های ساده می‌نامند. در این مقاله منظور از گراف همان گراف ساده است. در یک گراف، برای هر راس، مانند a، تعداد یال‌هایی که به آن راس متصل هستند را درجه آن راس می‌نامند و با $deg(a)$ نشان می‌دهند. بیشترین درجه در بین درجه‌های رئوس یک گراف



شکل ۱۵: گراف $G = (V, E)$



شکل ۱۶: الف) حلقه ب) یال چندگانه

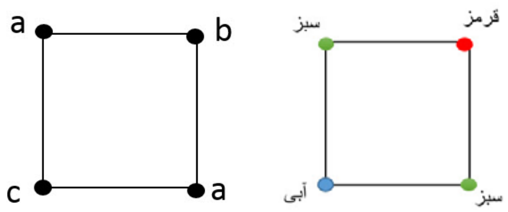
مانند G را با $\Delta(G)$، یا به اختصار با Δ، نشان می‌دهند. همچنین در یک گراف، هر دو راسی که با یک یال به هم متصل باشند را دو راس مجاور می‌نامند و هر دو یالی که در یک راس با هم مشترک باشند را دو یال مجاور می‌نامند. یک گراف را همبند می‌نامند هرگاه با انتخاب هر دو راس در آن گراف بتوان با گذشتن از یال‌ها و و راس‌ها مسیری بین آن دو راس انتخاب نمود. در غیر این صورت گراف را ناهمبند می‌نامند. گراف همبندی که درجه تمام راس‌های آن ۲ باشد را یک دور می‌نامیم. حال اگر تعداد رئوس یک دور عددی زوج باشد، آن دور را یک دور زوج و اگر تعداد رئوس یک دور عددی فرد باشد آن دور را یک دور فرد می‌نامیم. یک گراف را دوبخشی نامیم، هرگاه بتوان مجموعه رئوس گراف را طوری به دو زیرمجموعه تقسیم کرد که بین رئوسی که در هر زیرمجموعه قرار دارند هیچ یالی وجود نداشته باشد. در اینجا مطالب ارائه شده برای گراف همبند است، لذا جهت سهولت به جای گراف همبند از گراف استفاده می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر در نظریه گراف و آشنایی با مفاهیم منابع [۵] و [۲] را معرفی می‌نماییم.

در این مقاله از بین مباحث گسترده و مختلفی که در نظریه گراف وجود دارد، ما به مبحث انواع رنگ‌آمیزی گراف‌ها می‌پردازیم. در واقع رنگ‌آمیزی یک نوع برچسب‌گذاری برای گراف است که رویکرد کلی آن استفاده از نظیر کردن رنگ‌هایی به راس‌ها یا یال‌هاست، که در انواع رنگ‌آمیزی یا برچسب‌گذاری محدودیت‌های خاصی را رعایت می‌کنند. رنگ‌آمیزی گراف کاربردهای زیادی در زمینه‌های عملی و تئوری دارد. در ادامه با بیان دقیق‌تر به معرفی رنگ‌آمیزی راسی، رنگ‌آمیزی یالی و رنگ‌آمیزی کلی گراف‌ها می‌پردازیم و سپس کاربردهایی از انواع رنگ‌آمیزی در حل مسائل مختلف را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۴ رنگ‌آمیزی راسی

در رنگ‌آمیزی راسی گراف، مجموعه‌ای از رنگ‌ها را به راس‌های گراف اختصاص می‌دهیم به طوری که راس‌هایی که مجاور هستند با هم هم‌رنگ نباشند. جهت سهولت در برچسب گذاری راس‌ها با رنگ‌ها، به جای رنگ می‌توانیم از حروف استفاده کنیم. در این صورت هر دو راسی که با حرف یکسان برچسب‌گذاری شده باشند، در واقع دارای یک رنگ مشابه هستند. در شکل ۱.۲.۴ مثالی از رنگ‌آمیزی راسی ارائه شده است.

اولین ایده‌ای که ممکن است به ذهن هر کسی برسد این است که به هر راس گراف یک رنگ جداگانه نسبت دهیم! این یک ایده کاملا درست برای رنگ‌آمیزی راسی است. مثلا برای رنگ‌آمیزی گراف کامل که در آن همه رئوس گراف دو به دو به هم

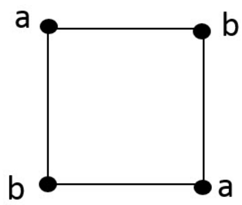


شکل ۱۷: یک رنگ‌آمیزی راسی برای گراف

متصل هستند، چاره‌ای جز این نیست که هر راس را با یک رنگ جداگانه رنگ کنیم. اما همیشه این همه رنگ لازم نداریم. مثلا برای رنگ‌آمیزی راسی گرافی با تعداد زیادی راس که هیچ یالی ندارد فقط یک رنگ کافیست! پس جهت صرفه جویی(!) در خرید قوطی‌های رنگ، ما می‌خواهیم از کمترین تعداد ممکن رنگ برای رنگ‌آمیزی راس‌های گراف استفاده کنیم.

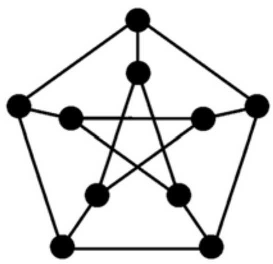
کمترین تعداد رنگ‌هایی که بتوان با استفاده از آن‌ها راس‌های یک گراف را رنگ کرد، عدد رنگی راسی (یا به اختصار عدد رنگی) آن گراف نامیده می‌شود. برای گرافی مانند G، عدد رنگی راسی آن را با $\chi(G)$، یا به اختصار با χ نشان می‌دهند.

مثال ۲.۴. *عدد رنگی هر دور زوج برابر ۲ است.*



شکل ۱۸: رنگ‌آمیزی راسی دور ۴ تایی

مساله ۳.۴. *عدد رنگی گراف زیر که معروف به گراف پترسن است، را بیابید.*



شکل ۱۹: گراف پترسن

سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که: برای هر گراف دلخواه چگونه می‌توان عدد رنگی آن گراف را مشخص نمود و عدد رنگی گراف به چه پارامترهایی از گراف بستگی دارد؟ با توجه به مطالب بالا، برای عدد رنگی گراف G با n راس در واقع n یک کران بالاست، یعنی $\chi(G) \leq n$. اما فقط برای گراف کامل با n راس دقیقا n تا رنگ نیاز داریم و برای سایر گراف‌ها با n راس عدد رنگی گراف از n کمتر می‌باشد(چرا؟). پس به دنبال یافتن کران بالای بهتری برای عدد رنگی گراف دلخواه هستیم.

یکی از الگوریتم‌های معروف برای رنگ‌آمیزی گراف، الگوریتم رنگ‌آمیزی حریصانه [۲۴] است. **الگوریتم حریصانه:** برای هر گراف مانند G با n راس، ابتدا راس‌های گراف را با $v_1, v_2, ..., v_n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. فرض می‌کنیم رنگ‌های مورد استفاده هم دارای شماره‌های $1, 2, 3, ...$ باشند. حال از اولین راس، یعنی v_1 شروع می‌کنیم، به این راس رنگ شماره ۱ را نسبت می‌دهیم. در مرحله دوم اگر راس v_2 با راس v_1 به هم متصل باشند رنگ ۲ و اگر با راس v_1 به هم متصل نباشند، همان رنگ

[۲۴] Greedy coloring

۱ را به آن نسبت می‌دهیم. در مراحل بعدی رئوس $v_۲, ..., v_n$ را به ترتیب رنگ می‌کنیم. به این صورت که هر راسی مانند v_i را با کوچکترین شماره رنگی که در راس‌های متصل به v_i تا این مرحله استفاده نشده، رنگ می‌کنیم. به این ترتیب با توجه به این که هر راس به حداکثر $\Delta(G)$ تا راس دیگر متصل هست و با در نظر گرفتن رنگ خود آن راس نتیجه می‌گیریم که $\Delta(G) + ۱$ تا رنگ برای رنگ کردن رئوس گراف G کافی است.

با استفاده از این الگوریتم کران بالایی که برای عدد رنگی گراف به دست می‌آید را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۴. *برای رنگ‌آمیزی هر گراف دلخواه حداکثر به اندازه بیشترین درجه رئوس آن گراف به اضافه یک رنگ لازم است. یعنی برای هر گراف مانند G داریم:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + ۱.$$

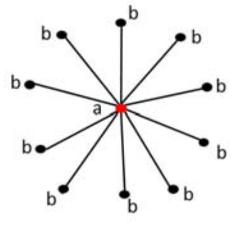
برای رنگ‌آمیزی گراف کامل با n راس، همان‌طورکه قبلا نیز اشاره کردیم، برای رنگ کردن هر راس باید از یک رنگ مختلف استفاده نماییم، لذا دقیقا n رنگ نیاز داریم. از طرفی در گراف کامل با n راس، هر راسی به $n - ۱$ راس دیگر متصل است. پس بیشترین درجه رئوس برابر با $n - ۱$ است، یعنی $\Delta = n - ۱$. در نتیجه برای گراف کامل داریم $\chi = \Delta + ۱$، و در نامساوی قضیه قبل تساوی برقرار است. گراف دیگری که برای عدد رنگی و بیشترین درجه رئوس آن در قضیه قبل تساوی برقرار است، گراف دور به طول فرد است. در این گراف با طول هر عدد فردی، بیشترین درجه همیشه برابر با ۲ است در حالی که عدد رنگی آن همیشه برابر با ۳ است.

بنابراین در کران بالای بدست آمده در قضیه قبل، برای گراف‌های کامل و دورهای فرد تساوی برقرار است. بروکس[۲۵] در سال ۱۹۴۱ ثابت کرد که فقط برای این دو دسته از گراف‌ها تساوی $\chi = \Delta + ۱$ برقرار است. این مطلب را در قضیه زیر به طور دقیق بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۴. *اگر G یک گراف همبند باشد که گراف کامل و دور فرد نباشد، در این صورت عدد رنگی آن حداکثر به اندازه بیشترین درجه رئوس است. یعنی $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

البته برای بعضی از گراف‌ها این کران بالا ممکن است خیلی بزرگ باشد و باید به دنبال یافتن کران‌های بهتری برای آن‌ها باشیم.

مثال ۶.۴. *گراف شکل زیر که یک گراف ستاره‌ای است در واقع یک گراف دوبخشی با عدد رنگی ۲ است، در حالی که بیشترین درجه رئوس آن ۱۰ است (در اینجا بیشترین درجه رئوس می‌تواند به اندازه کافی بزرگ باشد).*



شکل ۲۰: گرافی با $\chi = ۲$ و با $\Delta = ۱۰$

در اینجا به همین مقدار اطلاعات از رنگ‌آمیزی راسی گراف بسنده کرده و در بخش بعدی به رنگ‌آمیزی یالی گراف می‌پردازیم.

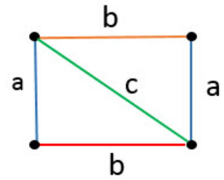
---

[۲۵] Brooks

۲.۲.۴ رنگ‌آمیزی یالی

در رنگ‌آمیزی یالی گراف مجموعه‌ای از رنگ‌ها را به یال‌های گراف اختصاص می‌دهند، به طوری که یال‌هایی که با هم مجاور هستند هم‌رنگ نباشند. در رنگ‌آمیزی یالی نیز مانند رنگ‌آمیزی راسی، جهت سهولت، معمولاً به جای رنگ از حروف یا اعداد استفاده می‌کنند. کمترین تعداد رنگ‌هایی که بتوان با استفاده از آن‌ها یک گراف را رنگ‌آمیزی یالی کرد، عدد رنگی یالی آن گراف نامیده می‌شود. برای گرافی مانند G، عدد رنگی یالی آن را با $\chi'(G)$، یا به اختصار با χ' نشان می‌دهند.

مثال ۷.۴. *عدد رنگی یالی گراف شکل زیر ۳ است.*



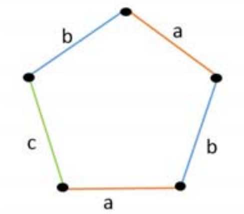
شکل ۲۱: رنگ‌آمیزی یالی گراف

سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که: برای هر گراف دلخواه چگونه می‌توان عدد رنگی یالی آن گراف را مشخص نمود و عدد رنگی یالی گراف به چه پارامترهایی از گراف بستگی دارد؟ در رنگ‌آمیزی یالی گراف، اگر به رئوس گراف دقت کنیم. مشاهده می‌کنیم که رنگ همه یال‌هایی که به یک راس وصل هستند باید با هم متفاوت باشند. لذا اولین نتیجه‌ای که بدست می‌آید را می‌توان به صورت قضیه زیر بیان نمود.

قضیه ۸.۴. *برای رنگ‌آمیزی یالی هر گراف دلخواه حداقل به اندازه بیشترین درجه رئوس آن گراف رنگ لازم است. یعنی، برای هر گراف مانند G داریم: $\Delta \leq \chi'$.*

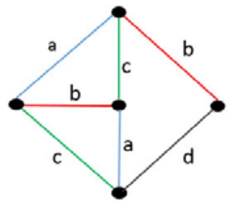
در مثال بعد گرافی ارائه می‌دهیم که عدد رنگی یالی آن اکیدا بزرگتر از بیشترین درجه راس‌های آن گراف باشد.

مثال ۹.۴. *عدد رنگی یالی گراف شکل زیر ۳ است، در حالی که بیشترین درجه رئوس آن ۲ می‌باشد.*



شکل ۲۲: گراف دور ۵ تایی با $\chi' = ۳$ و $\Delta = ۲$

مثال ۱۰.۴. *عدد رنگی یالی گراف شکل زیر ۴ است در حالی که بیشترین درجه رئوس آن ۳ می‌باشد.*



شکل ۲۳: گرافی با $\chi' = ۴$ و $\Delta = ۳$

در مثال‌های بالا می‌بینیم که فاصله بین χ' و Δ برابر یک واحد است. سوالی که در این قسمت مطرح است این است که فاصله بین عدد رنگی یالی و بیشترین درجه رئوس گراف آیا همیشه برابر ۱ است یا می‌تواند بیشتر هم باشد؟ ویزینگ [۲۶] در سال ۱۹۶۴ پاسخ این سوال را داد، در قضیه زیر به بیان دقیق این مطلب می‌پردازیم.

قضیه ۱۱.۴. *عدد رنگی یالی هر گراف دلخواه برابر با بیشترین درجه رئوس آن گراف و یا دقیقا یک واحد بیشتر از آن است. یعنی، برای هر گراف مانند G داریم:*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + ۱.$$

گراف دلخواه G را عضو "کلاس ۱" می‌نامند، هرگاه $\chi'(G) = \Delta(G)$. همچنین گراف دلخواه G را "کلاس ۲" می‌نامند، هرگاه $\chi'(G) = \Delta(G) + ۱$. برای گراف‌های مختلف مسئله تشخیص این‌که این گراف از کلاس ۱ است یا از کلاس ۲، در حالت کلی مساله سختی است. اما برای خانواده‌های خاصی از گراف‌ها این مساله حل شده است که برخی از نتایج به دست آمده را در این‌جا بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۴. *عدد رنگی یالی هر گراف دوبخشی برابر با بیشترین درجه رئوس آن گراف است. یعنی هر گراف دوبخشی از کلاس ۱ است.*

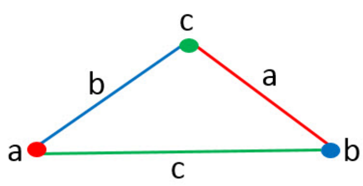
قضیه ۱۳.۴. *برای هر عدد فرد دلخواه، گراف دور فرد از کلاس ۲ است.*

مساله ۱۴.۴. *کلاس ۱ یا کلاس ۲ بودن گراف پترسن را مشخص کنید.*

۳.۲.۴ رنگ‌آمیزی کلی

در رنگ‌آمیزی کلی گراف مجموعه‌ای از رنگ‌ها را به راس‌ها و یال‌های گراف اختصاص می‌دهند، به طوری که اولا راس‌هایی که با هم مجاور هستند هم‌رنگ نباشند، دوما یال‌هایی که با هم مجاور هستند هم‌رنگ نباشند، سوما رنگ هر راس با رنگ یال‌هایی که به آن متصل هستند هم‌رنگ نباشد. در اینجا نیز برای سهولت در رنگ‌آمیزی، به جای رنگ از حروف استفاده می‌کنند. کمترین تعداد رنگ‌هایی که بتوان با استفاده از آن‌ها یک گراف را رنگ‌آمیزی کلی کرد، عدد رنگی کلی آن گراف نامیده می‌شود. برای گرافی مانند G، عدد رنگی کلی آن را با $\chi''(G)$، یا به اختصار با χ'' نشان می‌دهند.

مثال ۱۵.۴. *عدد رنگی کلی گراف شکل زیر ۳ است.*



شکل ۲۴: رنگ‌آمیزی کلی گراف

برای بدست آوردن کران برای عدد رنگی کلی یک گراف دلخواه ابتدا به سراغ راس با بیشترین درجه در بین رئوس گراف می‌رویم. برای رنگ‌آمیزی کلی گراف در این راس Δ تا رنگ برای رنگ کردن یال‌های مجاور با آن راس نیاز داریم. حال برای رنگ کردن خود آن راس یک رنگ دیگر به غیر از رنگ‌های قبلی نیاز است. بنابراین حداقل $\Delta + ۱$ رنگ نیاز خواهیم داشت. نتیجه به دست آمده را به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

[۲۶] Vizing

قضیه ۱۶.۴. *عدد رنگی کلی هر گراف دلخواه حداقل برابر با بیشترین درجه رئوس آن گراف به اضافه یک است. یعنی، برای هر گراف مانند G داریم:*

$$\Delta(G) + ۱ \leq \chi''(G).$$

در مورد کران بالا برای عدد رنگی کلی دکتر مهدی بهزاد و ویزینگ در سال ۱۹۶۵ حدس زیر را ارائه داده‌اند.

حدس ۱۷.۴. *عدد رنگی کلی هر گراف دلخواه حداکثر برابر با بیشترین درجه رئوس آن گراف به اضافه دو است. یعنی، برای هر گراف مانند G داریم:*

$$\chi''(G) \leq \Delta(G) + ۲.$$

این حدس در حالت کلی هنوز اثبات نشده است. ولی برای دسته‌های خاصی از گراف‌ها مانند گراف‌های دوبخشی، درستی حدس ثابت شده است[۴].

۳.۴ کاربردها

در این قسمت چند نمونه از کاربردهای رنگ‌آمیزی گراف‌ها را که در منابع مختلف مانند [۱] و [۵] ارائه شده است را بیان می‌کنیم.

۱.۳.۴ زمان‌بندی پروژه

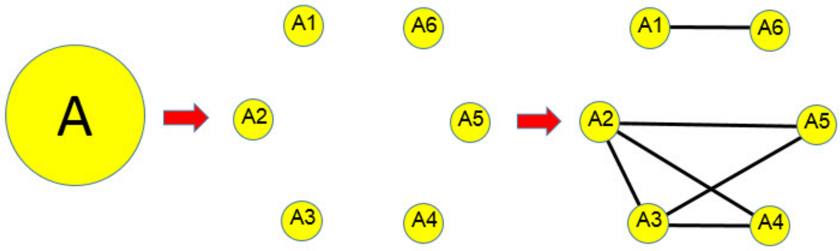
فرض کنید می‌خواهیم پروژه‌ای را در کمترین زمان انجام دهیم. ابتدا کل کاری که باید انجام شود را به زیربخش‌ها تقسیم می‌کنیم که زمان انجام آن‌ها با هم مساوی باشد. هر زیربخش را به عنوان یک راس در نظر گرفته و دو راس را به هم متصل می‌کنیم اگر و تنها اگر آن دو زیربخش را نتوان با هم در یک زمان به طور موازی انجام داد. در این صورت برای انجام دو زیربخشی که راس‌های متناظر آن‌ها با یک یال به هم متصل هستند، زمان‌های اجرای جداگانه‌ای مورد نیاز است. با این کار مساله زمان‌بندی انجام کار زیربخش‌ها تبدیل به مساله رنگ‌آمیزی راسی گراف ساخته شده می‌شود. بنابراین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی راسی گراف متناظر نشان‌دهنده تعداد گام‌های زمانی لازم برای اجرای همه زیربخش‌هاست. از این روش برای بهینه سازی انجام کار در کارخانجات و کوتاه کردن زمان تولید نیز می‌توان استفاده کرد. لازم به ذکر است که ما برای راحتی توضیح مساله از مساوی بودن زمان لازم برای انجام کار زیربخش‌ها استفاده کردیم و این مساله را می‌توان به حالت کلی و بدون مساوی بودن زمان‌ها تعمیم داد.

مثال ۱۸.۴. *فرض کنید برای انجام پروژه A به اندازه T زمان داریم. مشخص شده است که این پروژه به ۶ زیربخش $A_۱, \dots A_۶$ با زمان‌های مساوی $\frac{T}{۶}$ برای انجام هر کدام تقسیم شده است. از بین این زیربخش‌ها می‌دانیم لازم است زیربخش $A_۲$ قبل از زیربخش $A_۳$ انجام شود. همچنین می‌دانیم لازم است کار زیربخش $A_۳$ قبل از زیربخش‌های $A_۴$ و $A_۵$ انجام شود و زیربخش $A_۱$ قبل از زیربخش $A_۶$ انجام شود. پس نتیجه می‌گیریم زیربخش $A_۲$ نیز باید قبل از کار زیربخش‌های $A_۴$ و $A_۵$ انجام شود و زمان انجام بقیه زیربخش‌ها از هم مستقل است. گراف مربوط به این تقسیمات به شکل زیر خواهد بود.*

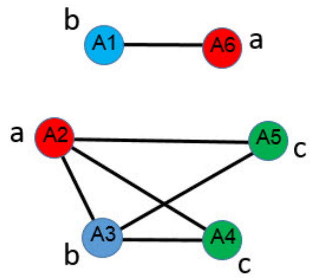
همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید عدد رنگی این گراف ۳ است. یعنی، برای انجام این پروژه به ۳ تا زمان $\frac{T}{۶}$، که در واقع برابر با $\frac{T}{۲}$ است زمان نیاز داریم.

۲.۳.۴ زمان‌بندی مسابقات

یکی از مهمترین مسائلی که در برگزاری مسابقات ورزشی مطرح می‌شود، ارائه برنامه زمانی برای اجرای مسابقات است. معمولا برنامه زمانی مناسب، برنامه‌ای است که مسابقات تیم‌ها بدون تداخل بوده و در کمترین مرحله یا زمان اجرا گردد. برای ساختن



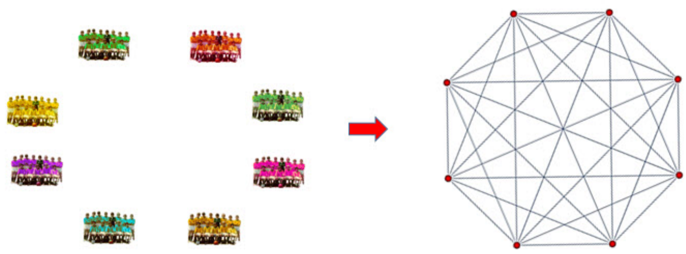
شکل ۲۵: گراف مربوط به ساختار پروژه A



شکل ۲۶: رنگ‌آمیزی راسی گراف مربوط به ساختار پروژه A

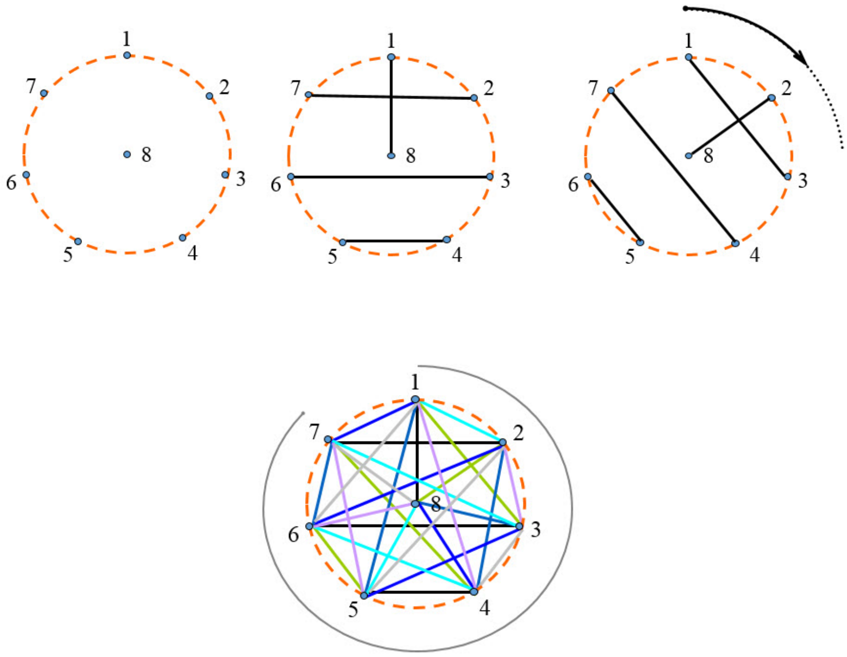
گراف متناظر بازی‌ها، هر تیم را به عنوان یک راس گراف در نظر می‌گیریم و بازی بین دو تیم مشخص کننده یال بین دو راس متناظر در گراف خواهد بود. برای زمان‌بندی مسابقات گردشی می‌توان رنگ‌آمیزی یالی یک گراف کامل را به کار برد. بدین صورت می‌توان در کمترین تعداد گردش این مسابقات را زمان‌بندی کرد بطوری که همه تیم‌ها در هر گردش بازی کنند. در این صورت تعداد گردش‌ها برابراست با تعداد رنگ‌های مورد استفاده برای رنگ‌آمیزی یالی گراف متناظر است.

مثال ۱۹.۴. *در یک دوره مسابقه فوتبال ۸ تیم شرکت کرده‌اند. برای این هشت تیم می‌خواهیم برنامه بازی‌ها را طوری بچینیم که هر دو تیم دقیقا یک بار با هم بازی کنند و هر تیم هر روز حداکثر یک بازی داشته باشد. از طرفی برای این که در کمترین زمان ممکن این بازی‌ها به اتمام برسد، لازم است هر تیم هر روز دقیقا یک بازی داشته باشد. این مساله تبدیل به رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل با ۸ راس می‌شود که در شکل زیر آن را نمایش داده‌ایم.*



شکل ۲۷: گراف مربوط به بازی فوتبال ۸ تیم

برای یافتن رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل با ۸ راس یکی از راس‌ها را در مرکز یک دایره قرار داده و هفت راس باقیمانده را روی محیط دایره قرار می‌دهیم. سپس با استفاده از روش زیر یال‌هایی که همرنگ هستند را مشخص می‌کنیم. همان طور که در شکل نیز مشخص است عدد رنگی یالی گراف ۷ است. لذا برای زمان‌بندی این مسابقات ۷ روز مورد نیاز است.



شکل ۲۸: رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل با ۸ راس

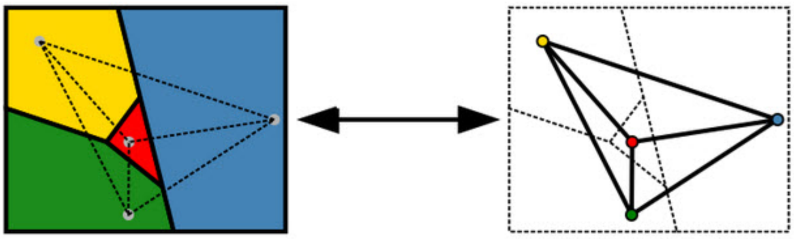
۳.۳.۴   قضیه چهاررنگ

قضیه چهاررنگ یا حدس چهاررنگ از مسائل مشهور و قدیمی ریاضیات است که سال‌ها اثبات نشده مانده بود. به بیان ساده (و نادقیق) این قضیه می‌گوید: "برای رنگ کردن هر نقشه به‌طوری‌که کشورها و نواحی همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند فقط چهار رنگ کافی است." این حدس اولین بار در سال ۱۸۵۲ مطرح شد. در آن هنگام فرانسیس گاتری مشغول رنگ‌آمیزی نقشه انگلستان بود که متوجه شد چهار رنگ برای این کار کافی است. فرانسیس این موضوع را با برادرش فردریک مطرح کرد، که بعداً وی آن را به پیش دمرگان برد. اولین منبع منتشر شده در این مورد از آرتور کیلی در سال ۱۸۷۹ می‌باشد[۳].

البته برای رنگ کردن نقشه‌های ساده‌تر سه رنگ کافی است، ولی یک رنگ چهارم اضافی برای برخی نقشه‌ها لازم است. مثل نقشه‌هایی که در آن‌ها یک ناحیه با تعداد فرد نواحی دیگر احاطه شده است که به یکدیگر در یک دایره وصل هستند. اثبات این‌که چهار رنگ برای رنگ کردن هر نقشه‌ای کافی است بسیار سخت است. تعدادی اثبات‌های غلط و مثال‌های نقض از زمان ارائه قضیه چهاررنگ در ۱۸۵۲ بیان شده‌اند. اما اگر بخواهیم برای رنگ کردن نقشه از ۵ رنگ استفاده کنیم این کار به راحتی امکان‌پذیر است و این قضیه که به قضیه پنج رنگ مشهور است اثبات کوتاهی دارد. این قضیه در اواخر قرن ۱۹ اثبات شده است(هیووو ۱۸۹۰).

در واقع این مساله را می‌توان با کمک نظریه گراف، تبدیل به مساله رنگ‌آمیزی گراف‌ها نمود. به این صورت که هر ناحیه را به عنوان یک راس گراف در نظر می‌گیرند و راس‌های متناظر هر دو ناحیه‌ای که با هم مجاور هستند را با یک یال به هم متصل می‌کنند(شکل ۳.۳.۴). گراف حاصل گرافی است که می‌توان آن را در صفحه نقشه قرار داد و هر راس را در جای دلخواهی از ناحیه متناظر آن گذاشت، بدون آنکه هیچ دو یالی همدیگر را قطع کنند، چنین گراف‌هایی را گراف‌های مسطح می‌نامند. به بیان گرافی، قضیه چهار رنگ بیان می‌کند که رئوس یک گراف مسطح را می‌توان با چهار رنگ رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری‌که هیچ دو راس مجاور همرنگ نباشند[۶].

به غیر از مثال‌های ارائه شده، مثال‌های دیگری از کاربرد رنگ‌آمیزی گراف‌ها مانند طراحی و حل جدول سودوکو، زمان‌بندی لینک‌ها برای پروتکل شبکه‌های کامپیوتری، ارتباطات فیبر نوری و ... برای مطالعه علاقه‌مندان وجود دارد.



شکل ۲۹: ساختن گراف متناظر با یک نقشه

۴.۴ نتیجه گیری

آنچه بیان شد نمونه کوچکی بود از کاربردهای مبحث رنگ‌آمیزی در نظریه گراف که می‌توان برای دانش‌آموزان با اطلاعات دوره متوسطه بیان و ارائه کرد. بالا بردن اطلاعات غیردرسی ریاضی، علاقه و کنجکاوی دانش‌آموزان را در ریاضیات نوین بر می‌انگیزد و آن‌ها را برای مطالعات بیشتر در سطح آموزش عالی به سمت گرایش ریاضی و فیزیک سوق می‌دهد.

مراجع

[1] Bincy, A.K., & Jeba Presitha, B. (2017). Graph Coloring and its Real Time Applications an Overview. International Journal of Mathematics And its Applications. 5(4-F): 845-849. 29

[2] Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). Graph theory. New York: Springer. 24

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Graph coloring. 31

[4] Molloy, M., & Reed, B. (1998). A bound on the total chromatic number. Combinatorica. 18 (2): 241–280. 29

[5] West, D. B. (2000). Introduction to Graph Theory. Prentice Hall. 24, 29

[6] Wilson, R. (2002). Four Colors Suffice, London: Penguin Books. 31

۵ اجسام افلاطونی و توپ فوتبال

محمدرضا اسفندیاری
دانشجوی دکتری ریاضی محض دانشگاه زنجان ــ دبیر ریاضی

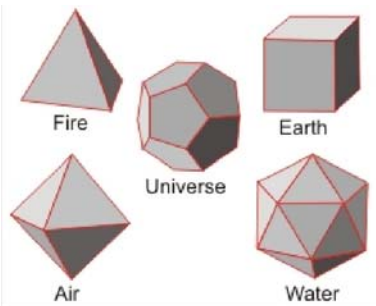
چکیده
در این نوشته نخست به معرفی اجسام افلاطونی می‌پردازیم و برخی از ویژگی‌ها و کاربردهای عمومی آنها را بیان می‌کنیم. سپس کاربردی از اجسام افلاطونی را در ساختار هندسی برخی از توپ‌های رایج در فوتبال را شرح می‌دهیم. با استفاده از فرمول مشخصه اویلر روی گراف‌ها، به انواع شکل‌های رایج روی سطح توپ فوتبال اشاره می‌کنیم.

۱.۵ اجسام افلاطونی

اجسام افلاطونی بعد از افلاطون فیلسوف یونان باستان، نام‌گذاری شده‌اند. وی آنها را حدود ۳۵۰ سال پیش از میلاد مسیح توصیف کرده است. با هر شکلی می‌توان هرم یا منشور ساخت، ولی فقط پنج نوع جسم افلاطونی داریم. جسم افلاطونی یک شکل صلب است که ویژگی‌های زیر را دارد:

- هر وجه جانبی (کناره) آن دقیقا یک شکل است.
- تعداد یال‌هایی که از هر رأس آن خارج شده‌اند یکسان هستند.
- طول همه یال‌های آن دقیقا یکسان است.

چهاروجهی (هرم)، مکعب (شش‌وجهی)، هشت‌وجهی، دوازده‌وجهی و بیست‌وجهی، اجسام افلاطونی می‌باشند. فقط با مربع، مثلث و پنج‌ضلعی می‌توان اجسام افلاطونی ایجاد کرد. برخی فلاسفه اجسام افلاطونی را به دلایلی به عناصر پنج‌گانه آفرینش (زمین، هوا، آب، آتش و کائنات) تشبیه می‌کنند (شکل ۳۶ را ببینید). اجسام افلاطونی علاوه بر این‌که شکل‌های هندسی بسیار



شکل ۳۰: نام‌گذاری اجسام افلاطونی به عناصر پنج‌گانه آفرینش

زیبا و منحصر بفردی می‌باشند، کاربردهای زیادی در زندگی واقعی و صنعت دارند. نمونه‌های مختلفی از تاس‌ها امروزی به شکل اجسام افلاطونی داریم، چرا که در این شکل‌ها شانس آمدن تمام وجه‌ها یکسان است (شکل ۳۷ را ببینید).
از کاربردهای دیگر اجسام افلاطونی ساخت انواع مکعب‌های روبیک است. امروزه نمونه‌های مختلفی از بازی‌های روبیک وجود دارد که از بازی‌های مفید و پرطرفدار می‌باشند (شکل ۳۲ را ببینید).

در بسیاری از مراکز علمی و حتی برخی از پارک‌ها مجسمه‌هایی بسیار زیبا از اجسام افلاطونی قرار گرفته شده است، برای نمونه در یکی از پارک‌های شهر اشتاینفورت[27] در آلمان، مجسمه‌هایی از اجسام افلاطونی در معرض دید عموم قرار گرفته است

[27] Steinfurt

شکل ۳۱: انواع تاس‌های موجود بر اساس اجسام افلاطونی

شکل ۳۲: برخی از مکعب‌های روبیک بر پایه اجسام افلاطونی

(شکل ۳۳ را ببینید).

شکل ۳۳: مجسمه‌ها و تصاویری از اجسام افلاطونی

۲.۵ اجسام افلاطونی و توپ‌های فوتبال

توپ از ساده‌ترین ابزاری بوده که حتی قبل از اختراع فوتبال، انسان‌ها به نوعی از آن استفاده می‌کردند. همزمان با پیشرفت فوتبال، توپ‌های فوتبال نیز دچار دگرگونی و تغییرات زیادی شدند. در شکل ۳۴ برخی از توپ‌های ادوار مختلف جام جهانی فوتبال را مشاهده می‌کنید.

از جام جهانی ۱۹۷۰ به بعد توپ‌های رایج در فوتبال توپ‌هایی هستند که سطح آن‌ها از پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی ساخته شده است (در این نوشته به این توپ‌ها، توپ‌های کلاسیک می‌گوییم). شرکت آدیداس که عهده‌دار ساخت و تهیه توپ‌های مسابقات جام‌جهانی هست، ادعا کرد که توپ‌های ساخته شده از پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی گردتر و دقیق‌تر هستند. این نمونه توپ‌ها تا به امروز نیز از آن‌ها استفاده می‌شود.

در سال‌های اخیر نیز با پیشرفت تکنولوژی تولید تجهیزات ورزشی (تقریبا از جام جهانی ۲۰۰۲ کره جنوبی و ژاپن به بعد)، روش ساخت توپ‌های فوتبال نیز دچار دگرگونی و تغییر شده است. امروزه بجای پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی‌ها، بعضی از توپ‌های فوتبال از چند منحنی یکسان ساخته شده‌اند.

قبل از بیان ساختار هندسی توپ‌های فوتبال و ارتباط آن با برخی از اجسام افلاطونی، نخست فرمول مشخصه اویلر برای گراف‌ها و چندوجهی‌ها را بیان می‌کنیم. اویلر در مطالعه گراف‌ها و در زمان حل مساله پل‌های شهر کونگسبرگ و ارائه دورهای اویلری متوجه رابطه جالب بین تعداد راس‌ها، یال‌ها و ناحیه‌ها در گراف‌ها شد. در گراف $G(V,E)$ که V تعداد راس‌ها، E تعداد یال‌ها

شکل ۳۴: توپ‌های ادوار مختلف جام جهانی

و R تعداد ناحیه‌هاست، اویلر متوجه رابطه زیر برای گراف‌های مسطحه همبند شد.

قضیه ۱.۵ (فرمول مشخصه اویلر). *برای گراف مسطحه همبند $G(V,E)$ داریم*

$$V + R - E = 2. \tag{1}$$

توجه داریم در شمردن ناحیه‌ها، فضای بیرون گراف را نیز یک ناحیه در نظر می‌گیریم.

اثبات. با استفاده از استقرا ساده‌ترین حالت، گراف با یک راس در نظر می‌گیریم (پایه استقرا). در این حالت $V = 1$، $R = 1$ و $E = 0$، بنابراین $V + R - E = 2$. با اضافه کردن یک راس، برای این که گراف همبند باشد باید یک یال دیگر اضافه کنیم، در این حالت $V = 2$، $R = 1$ و $E = 1$، بنابراین $V + R - E = 2$. با اضافه کردن یک یال دیگر، یک ناحیه دیگر اضافه می‌شود. بنابراین در هر مرحله برای گراف مسطحه همبند داریم $V + R - E = 2$. زیرا با افزودن یک راس باید یک یال افزوده شود و با افزودن یک یال یک ناحیه ایجاد می‌شود که اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند (شکل زیر را ببینید). □

فرمول مشخصه اویلر برای چندوجهی‌های محدب و به ویژه اجسام افلاطونی نیز برقرار است. در جدول زیر برای هر یک از اجسام افلاطونی تعداد راس‌ها، یال‌ها و همچنین وجه‌ها (برای چندوجهی‌ها بجای ناحیه از وجه استفاده می‌کنیم و با F نشان می‌دهیم) را مشخص می‌کنیم.

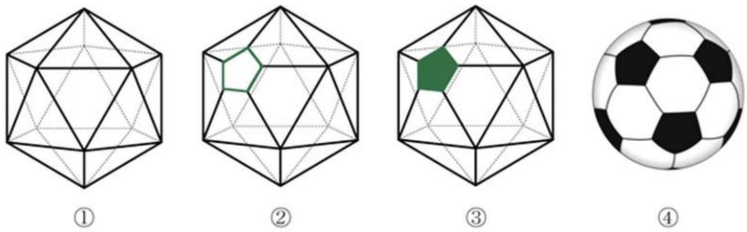
نام شکل	تعداد راس V	تعداد یال E	تعداد وجه F	$V+F-E$
چهاروجهی(هرم)	۴	۶	۴	۲
شش‌وجهی(مکعب)	۸	۱۲	۶	۲
هشت‌وجهی	۶	۱۲	۸	۲
دوازده‌وجهی	۱۲	۳۰	۲۰	۲
بیست‌وجهی	۲۰	۳۰	۱۲	۲

توپ‌های کلاسیک فوتبال (توپ‌هایی شامل پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی) در واقع از پنجمین جسم افلاطونی یعنی بیست‌وجهی ساخته شده‌اند. در ادامه مراحل ساخت توپ را نشان می‌دهیم.

گام ۱. یک بیست‌وجهی (پنجمین جسم افلاطونی) با ۲۰ وجه مثلثی و ۱۲ راس بکشید (۱).

گام ۲. هر راس را با یک صفحه برش دهید در این صورت ۱۲ پنج‌ضلعی ایجاد می‌شود(۲).

گام ۳. وجه‌های باقی‌مانده به صورت شش‌ضلعی هستند(۳).



شکل ۳۵: مراحل ساخت توپ فوتبال

توپ‌های فوتبال نمونه بسیار خوبی از گراف‌های مسطحه هستند. سطح توپ‌های کلاسیک فوتبال از پنج‌ضلعی‌های منتظم (به رنگ سیاه) و شش‌ضلعی‌های منتظم (به رنگ سفید) ساخته شده است. در ادامه با استفاده از فرمول مشخص اویلر می‌خواهیم تعداد پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌های روی سطح توپ فوتبال را بیابیم.

مساله ۲.۵. *نشان دهید تعداد پنج‌ضلعی‌های روی توپ‌های کلاسیک فوتبال ۱۲ تا و تعداد شش‌ضلعی‌ها ۲۰ تاست.*

اثبات. فرض کنیم تعداد پنج‌ضلعی‌های روی توپ برابر x و تعداد شش‌ضلعی‌ها برابر y باشد. در فرمول مشخصه اویلر ما باید سه چیز را مشخص کنیم.

۱. تعداد ناحیه‌ها. تعداد ناحیه‌ها در واقع همان تعداد پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌ها است. یعنی

$$R = x + y.$$

۲. تعداد یال‌ها. تعداد یال‌ها همان تعداد ضلع‌ها است ولی توجه داشته باشیم هر یال دو بار شمرده می‌شود. یعنی هر ضلع پنج‌ضلعی یک ضلع شش‌ضلعی هم هست و برخی از ضلع‌های شش‌ضلعی‌ها مشترک هستند. پس تعداد یال‌ها برابر است با

$$\frac{۵x + ۶y}{۲}.$$

۳. تعداد راس‌ها. درجه هر راس سه است؛ یعنی هر راس به سه تا یال وصل است. پس تعداد راس‌ها برابر است با

$$V = \frac{۵x + ۶y}{۳}.$$

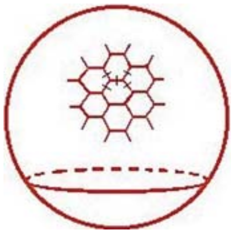
حال با قرار دادن تعداد یال‌ها، راس‌ها و ناحیه‌ها در فرمول اویلر داریم

$$V + R - E = \frac{۱}{۳}(۵x + ۶y) + x + y - \frac{۱}{۲}(۵x + ۶y) = ۲$$

با حل عبارت جبری بالا مقدار $x = ۱۲$، بدست می‌آید. حال با توجه به ساختار توپ، هر ضلع پنج‌ضلعی، ضلع یک شش‌ضلعی است و هر شش‌ضلعی با سه پنج‌ضلعی مجاورت دارد، بنابراین تعداد شش‌ضلعی‌های روی سطح توپ فوتبال برابر است با $\frac{۱۲\times۵}{۳} = ۳۰$. □

مساله ۳.۵. *آیا می‌توان تمام سطح توپ فوتبال را فقط با شش‌ضلعی ساخت؟ در صورت امکان با چند شش‌ضلعی؟*

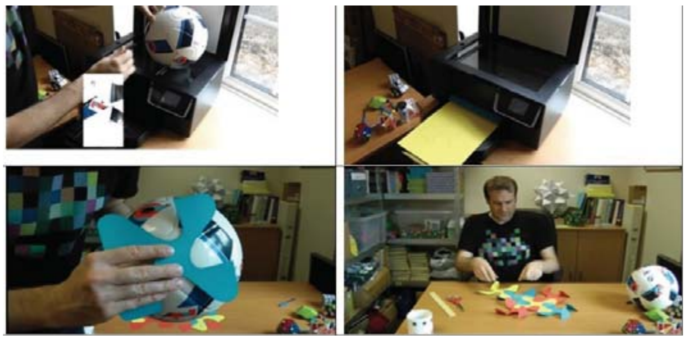
اثبات. به برهان خلف فرض کنیم بتوان تمام سطح توپ فوتبال را با شش‌ضلعی ساخت.



فرض کنیم تعداد شش‌ضلعی‌های روی سطح توپ xتا باشد. در این صورت تعداد یال‌ها برابر است با $E = \frac{۶x}{۲} = ۳x$ و تعداد راس‌ها برابر است با $V = \frac{۶x}{۳} = ۲x$، بنابراین با توجه به فرمول مشخصه اویلر داریم $V+R-E = ۲x+x-۳x = ۰$، و این با فرمول مشخصه اویلر در تناقض است. بنابراین سطح توپ فوتبال را نمی‌توان فقط با شش‌ضلعی ساخت. □

در جام جهانی ۲۰۱۴ برزیل، شرکت آدیداس برای اولین بار از توپ فوتبالی رونمایی کرد که از شش منحنی به صورت زیر ساخته شده است.

در ادامه با استفاده از تصاویر نشان می‌دهیم ترکیب این شش منحنی با هم به صورت یک شش‌وجهی یعنی مکعب است. در اینجا تصاویری از یک ویدئو آموزشی که به این موضوع پرداخته است مشاهده می‌کنید.
با اسکن سطح توپ فوتبال با پرینتر، منحنی‌ها را برش می‌دهیم (در ادامه تصاویر اسکن و برش منحنی‌ها را مشاهده می‌کنید).
بنابراین با ترکیب منحنی‌ها به صورت زیر می‌توان مکعب ایجاد کرد.



توپ‌های رایج امروز در فوتبال از سه نوع جسم افلاطونی، مکعب، دوازده‌وجهی و بیست‌وجهی ساخته شده‌اند.

در پایان پیشنهاد می‌کنیم از آنجا که فوتبال یکی از پرطرفدارترین ورزش‌ها در دنیا می‌باشد، از این رو پرداختن به مسائل علمی در فوتبال، برای دانشجویان و دانش‌آموزان مورد توجه است. در این نوشته به ساختار هندسی توپ فوتبال اشاره کردیم، که به اعتقاد اینجانب اجسام افلاطونی و کاربردهای آن می‌تواند در بخش هندسه کتب درسی گنجانده شود و همچنین فرمول مشخصه اویلر روی گراف‌ها و توپ فوتبال به عنوان یک مثال از گراف مسطح همبند می‌تواند در بخش گراف کتب درسی گنجانده شود.

مراجع

[1] S. Tanna, Amazing math: Introduction to platonic solids, createSpace, 2014.

[2] Richard J. Trudeau, Introduction to graph theory, dover publications, 1994.

[3] https://www.youtube.com/watch?v=WHjziETWtIAt=310s

[4] https://www.youtube.com/watch?v=tfTpSkYQGrI

۶ چند مساله راجع به مسابقات و جدول لیگ‌ها در فوتبال

محمدرضا اسفندیاری
دانشجوی دکتری ریاضی محض دانشگاه زنجان ـ دبیر ریاضی

چکیده

در این نوشته چند مساله راجع به مسابقات و جدول لیگ‌ها در فوتبال مطرح می‌کنیم. این مسائل می‌تواند در آموزش و کاربرد برخی از موضوعات مقدماتی مانند ترکیبیات، دستگاه معادلات خطی، معادله دیوفانتی ساده (معادله سیاله)، دنباله‌های هندسی، اعداد مثلثی و ... مناسب باشند.

۱.۶ مسابقات فوتبال

مسابقات و رقابت‌های فوتبال بدون شک یکی از پرطرفدارترین و هیجان انگیزترین رخدادهای ورزشی در جهان است. میلیون‌ها نفر به صورت زنده از تلویزیون یا با حضور در ورزشگاه این رقابت‌ها را دنبال می‌کنند. از مهم‌ترین تورنمنت‌های فوتبال می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

- مسابقات جام جهانی فوتبال
- جام ملت‌های بین قاره‌ای، از جمله جام ملت‌های اروپا (مسابقات یورو)
- جام باشگاهای بین قاره‌ای (لیگ قهرمانان اروپا، آسیا، آمریکای جنوبی، آفریقا)
- مسابقات لیگ کشورها(لیگ برتر انگلیس، بوندیس لیگا آلمان، لالیگا اسپانیا، سری آ ایتالیا، لیگ برتر ایران و ..)
- مسابقات جام حذفی در کشورهای مختلف

تورنمنت‌ها و مسابقات فوتبال امروزه به شیوه‌های مختلفی برگزار می‌شوند. به طور کلی رقابت‌های فوتبال به دو صورت گروهی و حذفی برگزار می‌شوند. در رقابت‌های گروهی هر تیم با سایر تیم‌ها بازی می‌کند و معمولا این رقابت‌ها به صورت رفت و برگشت (یک بازی مهمان و یک بازی میزبان) برگزار می‌شوند. تیم‌ها بر اساس امتیازات بدست آمده، در جدول لیگ رتبه‌بندی می‌شوند. برای هر برد سه امتیاز، مساوی یک امتیاز و باخت صفر امتیاز در نظر گرفته می‌شود. برای دو تیمی که هم امتیاز باشند، قوانین و مقررات در کشورهای مختلف فرق می‌کند، بعضی کشورها به تفاضل گل و گل زده بیشتر و ... و بعضی کشورها مانند اسپانیا بازی رو در رو را لحاظ می‌کنند.

یکی از قویترین و جذاب‌ترین نمونه از بازی‌های گروهی لیگ برتر انگلیس[۲۸] است. برای نمونه در اینجا جدول لیگ برتر انگلیس را در پایان رقابت‌های فصل ۲۰۱۴ ـ ۲۰۱۵ می‌بینید. همان طور که در شکل ۳۶ می‌بینید، جدول لیگ از چند ستون به نام تعداد بازی، تعداد برد، تعداد مساوی، تعداد باخت، تفاضل گل و ستون مهم مجموع امتیازها ایجاد شده است.

در رقابت‌هایی که به صورت حذفی برگزار می‌شوند، تیم‌ها دو به دو با هم بازی می‌کنند و تیمی که شکست بخورد (در مجموع رفت و برگشت یا به صورت تک بازی) از رقابت‌ها کنار می‌رود. در هر مرحله نیمی از تیم‌ها به مرحله بعد صعود می‌کنند. در مسابقات حذفی تعداد تیم‌ها توانی از دو است.

[28] premier league England

	لیگ برتر انگلیس ۲۰۱۴-۲۰۱۵								
	تیم	بازی‌ها	برد	مساوی	باخت	گل زده	گل خورده	تفاضل گل	امتیاز
۱	چلسی	۳۸	۲۶	۹	۳	۷۳	۳۲	۴۱	۸۷
۲	منچسترسیتی	۳۸	۲۴	۷	۷	۸۳	۳۸	۴۵	۷۹
۳	آرسنال	۳۸	۲۲	۹	۷	۷۱	۳۶	۳۵	۷۵
۴	منچستریونایتد	۳۸	۲۰	۱۰	۸	۶۲	۳۷	۲۵	۷۰
۵	تاتنهام	۳۸	۱۹	۷	۱۲	۵۸	۵۳	۵	۶۴
۶	لیورپول	۳۸	۱۸	۸	۱۲	۵۲	۴۸	۴	۶۲
۷	ساوتهمپتون	۳۸	۱۸	۶	۱۴	۵۴	۳۳	۲۱	۶۰
۸	سوانسی	۳۸	۱۶	۸	۱۴	۴۶	۴۹	-۳	۵۶
۹	استوک‌سیتی	۳۸	۱۵	۹	۱۴	۴۸	۴۵	۳	۵۴
۱۰	کریستال پالاس	۳۸	۱۳	۹	۱۶	۴۷	۵۱	-۴	۴۸
۱۱	اورتون	۳۸	۱۲	۱۱	۱۵	۴۸	۵۰	-۲	۴۷
۱۲	وستهام	۳۸	۱۲	۱۱	۱۵	۴۴	۴۷	-۳	۴۷
۱۳	وست بروموویچ	۳۸	۱۱	۱۱	۱۶	۳۸	۵۱	-۱۳	۴۴
۱۴	لسترسیتی	۳۸	۱۱	۸	۱۹	۴۶	۵۵	-۹	۴۱
۱۵	نیوکسل	۳۸	۱۰	۹	۱۹	۴۰	۶۳	-۲۳	۳۹
۱۶	ساندرلند	۳۸	۷	۱۷	۱۴	۳۱	۵۳	-۲۲	۳۸
۱۷	استون ویلا	۳۸	۱۰	۸	۲۰	۳۱	۵۷	-۲۶	۳۸
۱۸	هال سیتی	۳۸	۸	۱۱	۱۹	۳۳	۵۱	-۱۸	۳۵
۱۹	برنلی	۳۸	۷	۱۲	۱۹	۲۸	۵۳	-۲۵	۳۳
۲۰	کوئینز پارک	۳۸	۸	۶	۲۴	۴۲	۷۳	-۳۱	۳۰

شکل ۳۶: لیگ برتر انگلیس

۲.۶ مساله‌های مربوط به مسابقات گروهی

همان طور که در ابتدا گفتیم این مسائل می‌تواند در آموزش و کاربرد بعضی از مفاهیم ریاضی مانند، دستگاه خطی چند معادله چند مجهولی، حل معادله سیاله (معادله دیوفانتی)، مسائل شمارشی و ترکیبیات، دنباله‌های حسابی و هندسی، اعداد مثلثی و ... ظاهر شوند. این مسائل می‌تواند برای دانش‌آموزان متوسطه نیز آموزنده و جذاب باشند.

مساله ۱.۶. *در لیگ برتر فوتبال n تیم حضور دارند. هر تیم با سایر تیم‌ها یک بار بازی می‌کند (دور رفت) تعداد کل بازی‌های انجام شده چندتاست؟*

اثبات. فرض کنید تیم‌ها از ۱ تا n شماره گذاری شده باشند. تیم شماره ۱ با $n-۱$ تیم دیگر بازی می‌کند. تیم شماره ۲ با تیم شماره ۱ بازی کرده است بنابراین $n-۲$ بازی انجام می‌دهد. به همین ترتیب تیم شماره k، $n-k$ بازی انجام می‌دهد. بنابراین تعداد کل بازی‌های انجام شده برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdot+(n-۲)+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}.$$

مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n، در بسیاری از مسائل ریاضی ظاهری می‌شود. برای نمونه می‌توان به مساله تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه n اشاره کرد. یا تعداد دست دادن‌های n نفر در یک مهمانی، یا اگر n نقطه روی یک پاره خط نیستند، دو به دو به هم وصل کنیم چند پاره خط بوجود می‌آید. چندین اثبات برای مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n وجود دارد. چند اثبات تصویری و بدون کلام برای این مجموع وجود دارد. همچنین اثبات با استفاده از استقرای ریاضی و اثبات با استفاده از قاعده ادغام وجود دارد که ارائه انواع اثبات‌ها برای دانش‌آموزان بسیار آموزنده می‌باشد. □

مساله ۲.۶. *یک تیم فوتبال در رقابت‌های لیگ یک کشور n بازی انجام داده است. تعداد حالت‌های مختلف برای نتایج بدست آمده (برد_ مساوی_ باخت) چندتاست؟*

اثبات. ابتدا مساله را برای حالت ساده‌تر در نظر می‌گیریم. فرض کنید یک تیم سه بازی انجام داده است، تعداد حالت‌های مختلف نتایج بدست آمده (برد_مساوی_ باخت) به صورت زیر است.

با توجه به جدول بالا تعداد حالت‌های ممکن برای $n=۳$ برابر است با

$$۱+۲+۳+۴=\binom{۵}{۲}=۱۰.$$

تعداد مساوی	تعداد باخت	تعداد برد
۰	۰	۳
۰	۱	۲
۱	۰	۲
۰	۲	۱
۱	۱	۱
۲	۰	۱
۰	۳	۰
۱	۲	۰
۲	۱	۰
۳	۰	۰

جدول ۲: حالت‌های ممکن نتایج بدست آمده در ۳ بازی

حال می‌توان نشان داد تعداد نتایج ممکن برای n بازی برابر است با

$$1+2+3+\cdot+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\binom{n+2}{2}. \qquad (2)$$

برای اثبات رابطه فوق، تعداد بردهای یک تیم $n-k$ است که $0 \leqslant k \leqslant n$، برای $k=0$، یک حالت، برای $k=1$، دو حالت ممکن وجود دارد، برای $k=2$، سه حالت ممکن وجود دارد و به همین ترتیب برای $k=n$، تعداد حالت‌های ممکن $n+1$ است. بنابراین تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با

$$1+2+3+\cdot+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\binom{n+2}{2}.$$

سوال. آیا می‌توان حکم مساله فوق را با استفاده از استقرای ریاضی اثبات کرد؟

□

مساله ۳.۶. *یک تیم در لیگ فوتبال n بازی انجام می‌دهد. اگر در همه بازی‌ها برنده باشد، مجموع امتیازات آن $3n$ است (حداکثر امتیاز) و اگر همه بازی‌ها را ببازد صفر امتیاز کسب می‌کند (حداقل امتیاز) اگر S برابر مجموع امتیازات این تیم باشد، داریم، $0 \leqslant S \leqslant 3n$. آیا مقدار S می‌تواند هر عددی بین ۰ و $3n$ باشد؟ S چه اعداد یا عددی را نمی‌تواند اختیار کند؟*

اثبات. برای روشن تر شدن مساله ما در اینجا جدول مرحله گروهی جام جهانی که در گروهای ۴ تیمی با هم رقابت می‌کنند و هر تیم ۳ بازی انجام می‌دهد را نشان می‌دهیم. همان‌طور که در شکل ۳۷ مشاهده می‌کنید، در پایان ۳ بازی هیچ تیمی نمی‌تواند ۸ امتیاز کسب کند، زیرا با بردن هر سه بازی ۹ امتیاز کسب می‌کند و با بردن دو بازی و یک تساوی ۷ امتیاز کسب می‌کند، بنابراین ۸ امتیاز غیر ممکن است. در واقع در سه بازی یک تیم هر یک از امتیازهای ۰ تا ۹ را غیر از ۸ می‌تواند بدست آورد.
حال می‌خواهیم مساله را در حالت کلی حل کنیم و یک تیم در n بازی چه امتیازهایی می‌تواند بدست آورد.
فرض کنید یک تیم n بازی انجام داده است و x تعداد بردها، y تعداد مساوی‌ها و z تعداد باخت‌ها باشد. در این صورت مجموع امتیازهای یک تیم برابر است با $3x+y=3n-k$، که k عددی صحیح نامنفی که حداقل صفر و حداکثر $3n$ است، حال با در نظر گرفتن دستگاه دو معادله و سه مجهولی زیر داریم

$$\begin{cases} 3x+y=3n-k \\ x+y+z=n, \end{cases}$$

شکل ۳۷: جدول امتیازات مرحله گروهی جام جهانی ۲۰۱۸

بنابراین داریم

$$۳x + y = ۳(x+y+z) - k$$

با کمی ساده سازیم داریم

$$۲y + ۳z = k. \tag{۳}$$

بنابراین مساله منجر به جواب‌های صحیح و نامنفی معادله دیوفانتی خطی فوق می‌شود ($y,z \geqslant ۰$ و k عدد صحیح بین ۰ و $۳n$ است). با توجه به این که $\gcd(۲,۳)|k$ بنابراین معادله دیوفانتی خطی (۳) همواره جواب صحیح دارد، ولی ما در اینجا به دنبال جواب‌های صحیح نامنفی هستیم. به ازای $k = ۰$ معادله (۳) جواب دارد،یعنی $y = z = ۰$، این در حالتی اتفاق می‌افتد که یک تیم تمام بازی‌های خود را ببرد و هیچ تساوی و باختی نداشته باشد. به ازای $k = ۱$ ، معادله (۳) هیچ جواب صحیح نامنفی ندارد. در واقع یک تیم نمی‌تواند $۳n - ۱$ امتیاز کسب کند. حال نشان می‌دهیم معادله دیوفانتی خطی بالا، به ازای هر $k > ۱$ همواره جواب صحیح مثبت دارد. k را به پیمانه ۶ در نظر می‌گیریم، در این صورت k به یکی از حالت‌های $۶u$، $۶u + ۱$، $۶u + ۲$، $۶u + ۳$، $۶u + ۴$، $۶u + ۵$ است که $u \geqslant ۱$. برای $k = ۶u, ۶u + ۲, ۶u + ۳, ۶u + ۴$ به وضوح جواب صحیح مثبت دارد. برای $k = ۶u + ۱$ می‌توان نشان داد که $z = ۱$ و $y = ۳u - ۱$ همواره جواب صحیح مثبت معادله است. برای $k = ۶u + ۵$ نیز همواره داری جواب $z = ۱$ و $y = ۳u + ۱$ است. بنابراین معادله دیوفانتی (۳) به غیر از حالت $k = ۱$، همواره دارای جواب است، به عبارتی یک تیم هر امتیازی غیر از $۳n - ۱$ را می‌تواند کسب کند. □

در جدول امتیازات لیگ‌ها بعضی از تیم‌ها تعداد بازی‌ها و تعداد امتیازهای آنها یکسان است. برای نمونه در جدول ۳۶ مربوط به لیگ برتر انگلیس تیم‌های ساندرلند و استون‌ویلا در ۳۸ بازی دقیقا ۳۸ امتیاز کسب کرده‌اند. می‌خواهیم ببینیم چه رابطه‌ای بین نتایج بدست آمده وجود دارد.

مساله ۴.۶. *یک تیم در n بازی n امتیاز کسب می‌کند، چه رابطه‌ای بین تعداد بردها و باخت‌های آن وجود دارد؟ چند حالت ممکن برای نتایج بدست آمده وجود دارد؟*

اثبات. ابتدا مساله را برای حالت ساده‌تر در نظر می‌گیریم، مثلا برای $n = ۲۰$ داریم.
با توجه به جدول بالا برای تیمی که در ۲۰ بازی ۲۰ امتیاز کسب کند. در ساده‌ترین حالت این است که تمام بازی‌ها مساوی کند و هر بازی یک امتیاز کسب کند، در حالت کلی متوجه می‌شویم که بین تعداد بردها و باخت‌ها رابطه‌ای وجود دارد و همیشه تعداد باخت‌ها دو برابر تعداد بردهاست.

امتیاز	مساوی	باخت	برد
۲۰	۲۰	۰	۰
۲۰	۱۷	۲	۱
۲۰	۱۴	۴	۲
۲۰	۱۱	۶	۳
۲۰	۸	۸	۴
۲۰	۵	۱۰	۵
۲۰	۲	۱۲	۶

جدول ۳: حالت‌های ممکن کسب ۲۰ امتیاز در ۲۰ بازی

حال برای n بازی فرض کنید، x تعداد بردها، y تعداد مساوی‌ها و z تعداد باخت‌ها باشد. مجموع امتیازها برای یک تیم برابر است با $۳x + y$ (هر برد سه امتیاز و مساوی یک امتیاز) و تعداد کل بازی‌ها برابر است با $x + y + z$، بنابراین

$$۳x + y = x + y + z,$$

با توجه به رابطه فوق و ساده کردن داریم $۲x = z$، یعنی همواره تعداد باخت‌ها دو برابر تعداد بردهاست.
برای حل قسمت دوم مساله، یعنی تعداد حالت‌های ممکن، همان طور که در جدول فوق مشاهده کردیم برای $n = ۲۰$، هفت حالت مختلف وجود دارد، در این حالت تعداد بردها نمی‌تواند ۷ تا باشد زیرا $۲۰ < ۱۴ + ۷$ و غیر ممکن است. حال فرض کنید تعداد بردها kتا باشد در این صورت باید $n < ۳k = k + ۲k$، یعنی $k \leqslant [\frac{n}{۳}]$، بنابراین تعداد کل حالت‌های ممکن بربر است با

$$\left[\frac{n}{۳}\right] + ۱.$$

□

در مساله بعد می‌خواهیم مشخص کنیم در یک جدول رقابت‌های گروهی که فقط تعداد بازی‌ها و امتیازهای یک تیم داده شده است، مشخص کنیم چه تعداد از بازی‌ها مساوی و چه تعداد برنده داشته است.

مساله ۵.۶. *فرض کنید در یک جدول گروهی n تیم با هم رقابت می‌کنند، تعداد بازی‌ها و امتیازهای هر تیم داده شده است. می‌خواهیم مشخص کنیم در این رقابت‌ها چه تعداد از بازی‌ها مساوی و چه تعداد برنده داشته است.*
به عنوان مثال در جدول زیر که مربوط به مسابقات مقدماتی جام‌جهانی ۲۰۱۸ در آسیاست، آیا می‌توانید با توجه به امتیازات داده شده مشخص کنید، چه تعداد از بازی‌ها مساوی و چندتا برنده داشته است؟

مقدماتی جام جهانی منطقه آسیا گروه B

	تیم	بازیها	برد	مساوی	باخت	گل زده	گل خورده	تفاضل گل	امتیاز
۱	ژاپن	۱۰				۱۷	۷	۱۰	۲۰
۲	عربستان	۱۰				۱۷	۱۰	۷	۱۹
۳	استرالیا	۱۰				۱۶	۱۱	۵	۱۹
۴	امارات	۱۰				۱۰	۱۳	-۳	۱۳
۵	عراق	۱۰				۱۱	۱۲	-۱	۱۱
۶	تایلند	۱۰				۶	۲۴	-۱۸	۲

اثبات. فرض کنید x تعداد بازی‌های باشد که برنده داشته است و y تعداد بازی‌های مساوی باشد. در این صورت $x + y$ تعداد کل بازی‌های انجام شده بین تیم‌هاست است (مسابقات به صورت رفت و برگشت انجام شده است). با توجه به مساله ۱.۶ $x + y = n(n - ۱)$. هر برد ۳ امتیاز و هر بازی مساوی در مجموع ۲ امتیاز (سهم هر تیم یک امتیاز) دارد، بنابراین مجموع

امتیازات برابر است با $۳x + ۲y$ ، فرض کنید S مجموع امتیازات باشد، بنابراین حل مساله منجر به دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر می‌شود.

$$\begin{cases} x + y = n(n - ۱) \\ ۳x + ۲y = S. \end{cases}$$

بنابراین در جدول بالا داریم

$$\begin{cases} x + y = ۳۰ \\ ۳x + ۲y = ۸۴. \end{cases}$$

که با حل دستگاه فوق داریم $x = ۲۴$ و $y = ۶$. آیا می‌توانید ستون‌های مربوط به تعداد برد، باخت و مساوی جدول بالا را کامل کنید؟ □

در مساله قبل S مجموع امتیازات جدول لیگ با n تیم در پایان دور رفت و برگشت مسابقات حداکثر $۳n(n - ۱)$ است و حداقل $۲n(n - ۱)$، یعنی $۲n(n - ۱) \leqslant S \leqslant ۳n(n - ۱)$ ، حداکثر مجموع امتیازها زمانی اتفاق می‌افتد که تمام بازی‌ها برنده داشته باشند و حداقل مجموع امتیازها زمانی اتفاق می‌افتد تمام بازی‌ها مساوی شوند. میانگین مجموع امتیازها یعنی میانگین حداکثر و حداقل امتیازها در یک جدول زمانی اتفاق می‌افتد که تعداد بردها و تعداد مساوی‌ها یکسان باشد.

مساله ۶.۶. *نشان دهید میانگین مجموع امتیازها در جدول یک لیگ با n تیم در پایان مسابقات (رفت و برگشت) همواره مضرب ۵ است.*

اثبات. در پایان مسابقات (رفت و برگشت) تعداد بازی‌ها عددی زوج است و میانگین امتیازها زمانی اتفاق می‌افتد که تعداد بردها و مساوی‌ها برابر باشد. در پایان تعداد کل بازی‌های انجام شده $n(n - ۱)$ است، بنابراین $x = y = \frac{n(n-۱)}{۲}$، و با توجه به مساله قبل مجموع امتیازات برابر است با $۳x + ۲y$، لذا

$$۳x + ۲y = ۳ \times \frac{n(n - ۱)}{۲} + ۲ \times \frac{n(n - ۱)}{۲} = ۵\frac{n(n - ۱)}{۲} = ۵k.$$

به عنوان مثال، در بازی‌های جام جهانی ۲۰۱۸ روسیه در گروه B، که تیم ایران نیز حضور داشت، مجموع امتیازها ۱۵ شد و از ۶ بازی انجام شده سه بازی تساوی شد و سه بازی برنده داشت. همچنین در گروه A جام جهانی ۲۰۱۸ روسیه، در ۶ بازی انجام

جام جهانی گروه B

	تیم	بازیها	برد	مساوی	باخت	گل زده	گل خورده	تفاضل گل	امتیاز
۱	اسپانیا	۳	۱	۲	۰	۶	۵	۱	۵
۲	پرتغال	۳	۱	۲	۰	۵	۴	۱	۵
۳	ایران	۳	۱	۱	۱	۲	۲	۰	۴
۴	مراکش	۳	۰	۱	۲	۲	۴	-۲	۱

شده هیچ بازی مساوی نشد و حداکثر مجموع امتیاز بدست آمده است. در این حالت می‌توان گفت مجموع امتیازها همواره مضربی از ۳ است. □

جام جهانی گروه A

	تیم	بازیها	برد	مساوی	باخت	گل زده	گل خورده	تفاضل گل	امتیاز
۱	اروگوئه	۳	۳	۰	۰	۵	۰	۵	۹
۲	روسیه	۳	۲	۰	۱	۸	۴	۴	۶
۳	عربستان	۳	۱	۰	۲	۲	۷	-۵	۳
۴	مصر	۳	۰	۰	۳	۲	۶	-۴	۰

مثال. تیم منچستریونایتد در لیگ برتر انگلیس، تعداد بردهای آن دو برابر تعداد مساوی های آن است. کدام گزینه می‌تواند مجموع امتیازهای این تیم باشد؟

الف) ۵۵ ب) ۵۶ ج) ۵۷ د)۵۸

حل. فرض کنید x تعداد بردها و y تعداد مساوی‌ها باشد. مجموع امتیازها برابر است با $۳x + y$، حال داریم $x = ۲y$ بنابراین

$$۳x + y = ۶y + y = ۷y,$$

بنابراین مجموع امتیازات مضرب ۷ است و گزینه (ب) صحیح است.

سوال. اگر مجموع امتیازهای یک تیم مضرب ۷ باشد، آیا می‌توان گفت همواره تعداد بردها دو برابر تعداد مساوی‌ها است؟

مساله ۷.۶. *فرض کنید مسابقه فوتبال بین دو تیم A و B با نتیجه m بر n به پایان برسد. تعداد نتیجه‌های ممکن در پایان نیمه اول چندتاست؟*

قبل از حل مساله در حالت کلی اجازه دهید، به مساله درحالت ساده‌تر بپردازیم. فرض کنید نتیجه بازی بین دو تیم A و B با نتیجه ۳ بر ۲ به نفع تیم A به پایان برسد، تعداد نتیجه های ممکن در پایان نیمه اول به صورت زیر است. (در (a, b) a تعداد گل‌های تیم A و b تعداد گل‌های تیم B است)

در حالت‌های زیر ممکن است تیم A در نیمه اول برنده باشد

$$(۱, ۰), (۲, ۰), (۳, ۰), \ (۲, ۱), (۳, ۱), \ (۳, ۲).$$

در حالت‌های زیر ممکن است تیم B در نیمه اول برنده باشد

$$(۰, ۱), (۰, ۲), \ (۱, ۲).$$

و حالت‌های مساوی زیر در پایان نیمه اول ممکن است اتفاق بیفتد

$$(۰, ۰)\,(۱, ۱), \ (۲, ۲).$$

بنابراین تعداد حالت‌های ممکن در پایان نیمه اول ۱۲ تاست.

حال مساله را در حالت کلی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $m > n$ باشد. تعداد حالت‌هایی که تیم A می‌تواند در پایان نیمه اول بازی پیروز باشد یه صورت زیر است

$$\Big\{(۱, ۰), (۲, ۰), \cdots, (m, ۰), \quad (۲, ۱), (۳, ۱), \cdots, (m, ۱), \quad (۳, ۲), (۴, ۲), \cdots,$$
$$(m, ۲), \quad \cdots, \quad (n + ۱, n), (n + ۲, n), \cdots, (m, n)\Big\}$$

که تعداد حالت‌های فوق برابر است با

$$m + m - ۱ + m - ۲ + m - ۳ + \cdots + m - n = (n + ۱)m - (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)\,.$$

تعداد حالاتی که تیم B ممکن است در پایان نیمه اول پیروز باشد به صورت زیر است

$$\Big\{(۰, ۱), (۰, ۲), \cdots, (۰, n), \quad (۱, ۲), (۱, ۳), \cdots (۱, n), \cdots \quad , (n, n - ۱)\Big\}$$

تعداد حالت‌های فوق برابر است با

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n.$$

تعداد حالت‌های مختلف که در پایان نیمه اول بازی مساوی باشد برابر است با

$$\Big\{(۰,۰),(۱,۱),(۲,۲),\cdots,(n,n)\Big\}$$

که تعداد حالت‌ها فوق برابر است با $n+۱$ حالت، بنابراین تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با

$$(n+۱)m-(۱+۲+۳+\cdots+n)+(۱+۲+۳+\cdots n)+n+۱$$
$$=(n+۱)m+n+۱=(m+۱)(n+۱).$$

بنابراین تعداد کل حالت‌های ممکن نتیجه بازی بین دو تیم A و B در پایان نیمه اول برابر است با

$$(m+۱)(n+۱).$$

مساله ۶.۸. *لیگ برتر فوتبال انگلیس شامل ۲۰ تیم هست، که در پایان هر دوره از مسابقات، سه تیمی که کم‌ترین امتیاز را کسب کنند، به لیگ پایین سقوط می‌کنند. برای دو تیم هم امتیاز قانون تفاضل گل در نظر می‌گیرند. یک تیم حداقل چند امتیاز کسب کند که فارغ از هر نتیجه دیگر در سایر مسابقات، تضمین کند که سقوط نمی‌کند؟ به زبان ساده‌تر، یک تیم با حداقل چند امتیاز هرگز سقوط نمی‌کند؟*

اثبات. در لیگ برتر انگلیس هر تیم در مجموع رفت و برگشت ۳۸ بازی انجام می‌دهد، حداکثر امتیاز برای یک تیم ۱۱۴ امتیاز و حداقل امتیاز ۰ است.
در صورتی که تمام بازی‌ها مساوی شوند، در این صورت هر تیم ۳۸ امتیاز کسب می‌کند. بنابراین یک تیم با ۳۸ امتیاز ممکن است سقوط کند. فرض کنید هر تیم در بازی‌هایی که میزبان است برنده شود و در بازی‌هایی که مهمان هست، شکست بخورد. در این صورت هر تیم ۱۹ برد و ۱۹ شکست دارد. بنابراین هر تیم ۵۷ امتیاز دارد. لذا ۵۷ امتیاز هم تضمینی برای بقا در لیگ برتر نیست(هر چند در عمل تیم ۵۷ امتیازی در رده‌های بالای جدول هست).
حال فرض کنید دو تیم در تمام بازی‌های خود با سایر تیم‌ها شکست بخورند و با حداکثر ۶ امتیاز (بازی‌های مقابل یکدیگر) سقوط کنند. اگر ۱۸ تیم باقی‌مانده در بازی‌های میزبان برنده و در بازی‌های مهمان بازنده شوند. در این صورت هر کدام از این تیم‌ها ۶۳ امتیاز دارد. بنابراین در این شرایط تیمی با ۶۳ امتیاز هم ممکن است سقوط کند. لذا در صورتی که تیمی ۶۴ امتیاز کسب کند تحت هیچ شرایطی سقوط نمی‌کند. □

در مسابقات فوتبال به صورت گروهی می‌خواهیم بررسی کنیم چند جدول مختلف ممکن است وجود داشته باشد، هر بازی سه نتیجه (برد، باخت و مساوی) دارد. همچنین در اینجا تیم‌هایی که هم امتیاز می‌شوند نیز یک جدول در نظر می‌گیریم، زیرا قادر نیستیم تیم‌های هم امتیاز را بر اساس تفاضل گل یا بازی رو در رو یا هر قاعده دیگر مشخص کنیم. ابتدا مساله را برای سه تیم در نظر می‌گیریم که با یک‌دیگر به صورت رفت بازی می‌کنند.

مساله ۶.۹. *سه تیم به صورت گروهی با یکدیگر رقابت می‌کنند، تعداد جدول‌های ممکن برای رده‌بندی این تیم‌ها چند تاست؟ (تیم‌های هم امتیاز را یک حالت در نظر می‌گیریم).*

اثبات. هر تیم دو بازی انجام می‌دهد. بنابراین هر تیم حداکثر ۶ امتیاز کسب می‌کند و بنا بر مساله ۶.۳ یک تیم نمی‌تواند ۵ امتیاز کسب کند. فرض کنید (a,b,c) به ترتیب امتیازات تیم اول، دوم و سوم باشد. تمام حالت‌های ممکن به صورت زیر است که ۲۶ تاست.

برای دو تیم که با هم بازی می‌کنند، تعداد جدول‌های ممکن ۳ تاست یعنی $(۱,۱)$، $(۰,۳)$، $(۳,۰)$، برای چهار تیم تعداد جدول‌های ممکن چندتاست؟ چگونه می‌توان آنها را شمرد؟ حال سوال زیر را مطرح می‌کنیم.

(۶, ۳, ۰)	(۳, ۴, ۱)	(۱, ۶, ۱)
(۶, ۰, ۳)	(۳, ۱, ۴)	(۱, ۲, ۴
(۶, ۱, ۱)	(۳, ۳, ۳)	(۱, ۴, ۲)
(۴, ۲, ۱)	(۳, ۰, ۶)	(۱, ۴, ۳)
(۴, ۱, ۲)	(۳, ۶, ۰)	(۱, ۳, ۴)
(۴, ۳, ۱)	(۲, ۱, ۴)	(۰, ۴, ۴)
(۴, ۱, ۳)	(۲, ۴, ۱)	(۰, ۶, ۳)
(۴, ۰, ۴)	(۲, ۲, ۲)	(۰, ۳, ۶)
(۴, ۴, ۰)	(۱, ۱, ۶)	

جدول ۴: تعداد جدول‌های ممکن برای سه تیم

سوال. در یک جدول لیگ فوتبال n تیم با هم رقابت می‌کنند. تعداد جدول‌های ممکن برای رده‌بندی این تیم‌ها چند تاست؟ (تیم‌های هم امتیاز را یک حالت در نظر می‌گیریم).

□

۳.۶ سیستم‌های بازی فوتبال

سیستم در فوتبال، عبارت است از نحوه آرایش یا طرز قرار گیری نفرات در زمین، که معادل انگلیسی formation یا line up است. در دهه ۱۸۷۰ در انگلستان هر تیم از سیستم (۷ − ۲ − ۱) استفاده می‌کرد. یک مدافع، دو بازیکن خط میانی و هفت مهاجم. در سال ۱۸۷۲ تیم اسکاتلند با سیستم (۶ − ۲ − ۲) بازی کرد. همزمان با پیشرفت فوتبال، سیستم و نحوه چینش بازیکنان نیز تغییر کرده است. به علاقمندان به سیستم‌های فوتبال به کتاب‌های تاریخ فوتبال ارجاع می‌دهیم. امروزه در فوتبال از سیستم‌های سه خطی مانند ۲ − ۴ − ۴ یا ۲ − ۵ − ۳ یا سیستم‌های چهار خطی مانند ۲ − ۱ − ۳ − ۴ یا حتی از سیستم‌های پنج خطی استفاده می‌شود.
بنابراین سیستم بازی در حالت کلی عبارت است از چینش ۱۰ بازیکن (به غیر ازدروازه‌بان) در زمین بازی و با توجه به تقسیم‌بندی زمین و خطوط بازی به سیستم‌های مختلفی دسته بندی می‌شوند. سوال ریاضی که مطرح می‌شود تعداد کل سیستم‌های بازی چندتاست؟ مثلا تعداد همه سیستم‌های سه قسمتی (دارای سه خطی اصلی بازی) چندتاست؟ این مساله شبیه به مساله افرازها است. برای نمونه هم افرازهای عدد ۵ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} ۵ &= ۴ + ۱ = ۳ + ۲ = ۳ + ۱ + ۱ = ۲ + ۲ + ۱ = ۲ + ۱ + ۱ + ۱ \\ &= ۱ + ۱ + ۱ + ۱. \end{aligned}$$

یعنی $p(۵) = ۷$، می‌توان مشاهده کرد $p(۱۰) = ۴۲$. سیستم بازی فوتبال با تعداد افرازها تفاوت اساسی دارد. برای مثال در افراز عدد ۱۰، حالت‌های ۲ − ۵ − ۳، ۵ − ۲ − ۳، ۳ − ۲ − ۵، ۲ − ۳ − ۵، ۵ − ۳ − ۲ و ۳ − ۵ − ۲ یکی افراز حساب می‌شوند ولی در سیستم بازی فوتبال شش سیستم متفاوت تلقی می‌شوند.

مساله ۱۰.۶ (تعداد سیستم‌های بازی فوتبال). *سیستم‌های بازی فوتبال با در نظر گرفتن خطوط بازی به سیستم‌های چند قسمتی تقسیم می‌کنند. (یک قسمتی، دو قسمتی، سه قسمتی، چهار قسمتی و ....) تعداد کل سیستم‌های چینش ده بازیکن چندتاست؟*

اثبات. مساله را می‌توان با استفاده از روش ترکیبیاتی مرسوم به نام Stars and bars حل کرد. برای نمونه تعداد سیستم‌های

سه قسمتی، برابر است با تعداد حالت‌های قرار گرفتن دو ستون بین ده بازیکن مانند زیر

$$***|*****|**.$$

که تعداد حالت‌های فوق برابر است با $\binom{۹}{۲} = ۳۶$. بنابراین تعداد کل سیستم‌ها ممکن برابر است با

$$\sum_{۱\leqslant k\leqslant ۱۰}\binom{۹}{k-۱} = \sum_{۰\leqslant k\leqslant ۹}\binom{۹}{k} = ۲^۹ = ۵۱۲.$$

$\square$

۴.۶ مساله‌های مربوط به مسابقات حذفی

در رقابت‌هایی که به صورت حذفی برگزار می‌شوند، برای این که تیم‌ها در هر مرحله دو به دو با هم رقابت کنند، تعداد تیم‌های شرکت کننده معمولا توانی از دو است. فرض کنید تعداد تیم‌های شرکت کننده در یک لیگ حذفی ۲^n تیم باشد، در این صورت تعداد کل بازی‌های انجام شده (با احتساب تک بازی حذفی) چندتاست؟
در مرحله اول تیم‌ها دو به دو با هم رقابت می‌کنند و در هر مرحله نیمی از تیم‌ها به دور بعد صعود می‌کنند و نیمی از تیم‌ها از دور رقابت حذف می‌شوند. بنابراین تعداد کل بازی‌های انجام شده برابر است با

$$۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۲^۲ + ۲ + ۱ = ۲^n - ۱. \qquad (۴)$$

رقابت‌های جام جهانی فوتبال بدون شک مهم‌ترین و هیجان‌انگیزترین رخداد جهانی است و معمولا بیشترین حضور افراد از کشورهای مختلف را گرد هم می‌آورد. هر چهار سال یک بار ۳۲ تیم با هم رقابت می‌کنند. تیم‌ها ابتدا در ۸ گروه ۴ تیمی با هم رقابت می‌کنند و سپس از هر گروه دو تیم به رقابت‌های حذفی صعود می‌کنند. با احتساب بازی ردبندی تعداد کل بازی‌های انجام شده ۶۴ تا است.

مساله ۱۱.۶. *فرض کنید تعداد تیم‌های شرکت‌کننده در جام‌جهانی فوتبال (یا هر تورنمنت دیگر که به شیوه جام جهانی برگزار می‌شود) ۲^n تیم باشد، نشان دهید تعداد کل بازی‌های انجام شده $۲^{n+۱}$ تاست.*

اثبات. . ۲^n تیم ابتدا به $۲^{n-۲}$ گروه چهار تیمی تقسیم می‌شوند، در هر گروه طبق مساله ۱.۶ تعداد بازی‌های انجام شده برابر است با $\frac{۴\times۳}{۲} = ۶$، بنابراین تعداد کل بازی‌های انجام شده در دور گروهی برابرست با $۶ \times ۲^{n-۲}$.
با توجه به این که از هر گروه دو تیم به دور بعد صعود می‌کند بنابراین تعداد تیم‌های شرکت‌کنند در مرحله حذفی $۲\times۲^{n-۲} = ۲^{n-۱}$ تیم است. و تعداد بازی انجام شده با احتساب بازی رده‌بندی برابر است با

$$۲^{n-۲} + ۲^{n-۳} + \cdots ۲^۲ + ۲ + ۱ + ۱ = ۲^{n-۱}.$$

بنابراین تعداد کل بازی‌های انجام شده برابر است با

$$۶ \times ۲^{n-۲} + ۲^{n-۱} = ۶ \times ۲^{n-۲} + ۲ \times ۲^{n-۲} = ۸ \times ۲^{n-۲} = ۲^{n+۱}.$$

$\square$

فرض کنید در یک تورنمنت حذفی، یک تیم بعد از دو شکست از دور رقابت‌ها حذف می‌شود. در اینجا می‌خواهیم مشخص کنیم حداکثر و حداقل بازی‌های ممکن در این دوره چندتاست؟

مساله ۱۲.۶. *در یک تورنمنت حذفی ۲^n تیم شرکت کرده‌اند، در این رقابت‌ها در صورتی که یک تیم دو بار شکست بخورد حذف می‌شود، حداکثر تعداد بازی‌هایی که می‌تواند انجام شود، چندتاست؟*

اثبات. برای این‌که حداکثر بازی انجام شود باید تیم‌هایی که در مرحله اول شکست خورده‌اند در بازی بعدی برنده شوند. ابتدا ۲^n تیم $۲^{n-۱}$ بازی دو به دو با هم انجام می‌دهند، در این صورت هر تیم یک برد یا یک شکست دارد. در مرحله بعد نیز تیم‌ها $۲^{n-۱}$ بازی با هم انجام می‌دهند (فرض می‌کنیم هر دو تیم بازنده یا هر دو تیم برنده دور قبل با هم بازی نکنند) و تیم‌هایی که در مرحله اول شکست خورده اند برنده شوند. در این صورت هر تیم یک باخت دارد و از این مرحله به بعد هر تیم با یک باخت حذف می‌شود. بنابراین حداکثر تعداد بازی‌های انجام شده برابر است با

$$۲^{n-۱} + ۲^{n-۱} + ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + ۲^{n-۳} + \cdots + ۲^۲ + ۲ + ۱ = ۲^{n+۱} - ۱.$$

بنابراین حداکثر تعداد بازی‌های انجام شده $۲^{n+۱} - ۱$ است. □

مساله ۱۳.۶. *در مساله قبل حداقل تعداد بازی‌های انجام شده چندتاست؟ (بازی آخر به صورت تک بازی انجام می‌شود).*

اثبات. کم‌ترین تعداد بازی‌ها زمانی اتفاق می‌افتد که هر تیمی که در بازی اول شکست خورده است در بازی بعدی نیز شکست بخورد (هر تیم دو شکست متوالی داشته باشد). در این صورت در مرحله اول $۲^{n-۱}$ بازی دو به دو با هم انجام می‌دهند در مرحله بعد نیز فرض کنید تیم‌های برنده با هم بازی نکنند و هر تیم که در مرحله قبل شکست خورده در این مرحله نیز شکست بخورد و از دور رقابت خارج شود. حال در مرحله سوم $۲^{n-۱}$ بازی انجام می‌شود. مشابه قبل فرض کنید هر تیم دو بار متوالی شکست بخورد. به همین ترتیب تعداد کل بازی‌های انجام شده برابر است با

$$\begin{aligned} &۲^{n-۱} + ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + ۲^{n-۲} + ۲^{n-۳} + ۲^{n-۳} + \cdots + ۲ + ۲ + ۱ \\ &= ۲^n + ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۲^۲ + ۱ = ۲^{n+۱} - ۳. \end{aligned}$$

بنابراین حداقل تعداد بازی‌های انجام شده $۲^{n+۱} - ۳$ است. □

۵.۶ مساله‌های مربوط به اعداد مثلثی

تعداد بازی‌های انجام شده در دور رفت مسابقات گروهی یک عدد مثلثی است، بنابراین می‌توان سوالات مربوط به اعداد مثلثی را نیز در قالب جدول لیگ‌ها و مسابقات مطرح کرد. برای نمونه دو مساله مقدماتی زیر را حل می‌کنیم.

مساله ۱۴.۶. *در رقابت‌های دور رفت لیگ فوتبال یک کشور n تیم حضور دارند. اگر کل بازی‌های انجام شده برابر p باشد. نشان دهید $۸p + ۱$ مربع کامل است.*

اثبات. طبق مساله ۱.۶ تعداد کل بازی‌های انجام شده در دور رفت برابر است با $\frac{n(n-۱)}{۲}$ بنابراین

$$۸p + ۱ = ۴n(n-۱) + ۱ = ۴n^۲ - ۴n + ۱ = (۲n - ۱)^۲.$$

□

مساله ۱۵.۶. *در مسابقات فوتبال یک کشور دو لیگ شماره ۱ و لیگ شماره ۲ وجود دارد. اگر لیگ ۱ دارای n تیم و لیگ ۲، $n + ۱$ تیم داشته باشد:*

الف) نشان دهید مجموع بازی‌های انجام شده هر دو لیگ روی هم در دور رفت به صورت مربع است.

ب) نشان دهید اختلاف مربع تعداد بازی‌های انجام شده در دو لیگ به صورت مکعب است؟

اثبات. برای حل قسمت (الف) طبق مساله ۱.۶ می‌توان نوشت

$$\frac{n(n-۱)}{۲} + \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{n}{۲}(n - ۱ + n + ۱) = n^۲.$$

برای حل قسمت (ب) نیز طبق مساله ۱.۶ داریم

$$\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^{۲} = \frac{n^{۲}}{۴}\left((n+۱)^{۲} - (n-۱)^{۲}\right) = n^{۳}.$$

به این ترتیب حل مسال کامل می‌شود.

□

مراجع

[1] Tom. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. xii+338 pp. MR0434929.

[2] D. M. Burton, *Elementary Number Theory* (Sixth Edition), McGraw-Hill, 2007.

[3] https://math.stackexchange.com/questions/780341/how-many-ways-can-you-build-a-football-soccer-team

[4] https://math.stackexchange.com/questions/329457/minimum-number-of-points-to-beat-the-drop-in-the-english-premier-league