



مبانی آنالیز ریاضی

علی مرصعی

عضو هیئت علمی دانشگاه زنجان

انتشارات دانشگاه زنجان
۱۳۹۹

سرشناسه	: مرصعی، علی، ۱۳۵۴
عنوان و نام پدیدآور	: مبانی آنالیز ریاضی/علی مرصعی؛ ویراستار علمی فرض اله میرزاپور؛ ویراستار ادبی محمد ابراهیم پور نمین
مشخصات نشر	: زنجان: دانشگاه زنجان، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری	: ۱۷۴ ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۲۲-۶۹۳۳۱۴-۸
وضعیت فهرستنویسی	: فیبا
یادداشت	: کتابنامه.
یادداشت	: نمایه.
موضوع	: آنالیز ریاضی-راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: Mathematical analysis Study and thesching (Higher)
موضوع	: آنالیز ریاضی-مسائل، تمرین ها و غیره (عالی)
موضوع	: Mathematical analysis-Problems, exercises, etc (Higher)
شناسه افزوده	: میرزاپور، فرض اله، ۱۳۳۶ -، ویراستار
شناسه افزوده	: دانشگاه زنجان
رده بندی کنگره	: QA۳۰۰
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۷۳۹۰۲۵۵
وضعیت رکورد	: فیبا



دانشگاه زنجان

انتشارات دانشگاه زنجان

عنوان کتاب: مبانی آنالیز ریاضی

علی مرصعی

ویراستار علمی: فرض اله میرزاپور

ویراستار ادبی: محمد ابراهیم پور نمین

صفحه آرا و طراح جلد: علی مرصعی

ناشر: دانشگاه زنجان

تاریخ و نوبت چاپ: ۱۳۹۹ - اول

قیمت: ۵۰۰۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۶۹۳۳۱۴-۸

قطع: وزیری

چاپخانه: چاپ دیجیتال ماهان

نشانی: زنجان، کیلومتر ۶ جاده تبریز، دانشگاه زنجان، صندوق پستی ۳۱۳

تلفن: ۰۲۴-۳۳۰۵۲۶۴۱ دورنگار: ۰۲۴-۳۲۲۸۳۰۷۷

حق چاپ برای ناشر محفوظ است.

تقدیم بہ اساتید بزرگوارم

جناب آقای دکتر فرض الہ میرزاپور
&
جناب آقای دکتر محمد صالح مصلحیان

مقدمه

بحث آنالیز ریاضی دوره کارشناسی یکی از جذاب‌ترین موضوعات ریاضی است که هر دانشجوی کارشناسی ریاضی باید با آن آشنایی داشته باشد. در این ارتباط، کتاب‌های ارزشمندی وجود دارد که از جمله می‌توان از کتاب **اصول آنالیز ریاضی** تألیف والتر رودین، کتاب **آنالیز ریاضی** تألیف تام م. آپوستل و... نام برد.

در سال‌های اخیر خوشبختانه اساتید بزرگی از کشور عزیزمان اقدام به تألیف و ترجمه کتاب با موضوع آنالیز ریاضی کرده‌اند که این‌جانب در سابقه بیست‌ساله تدریس دانشگاهی خود، از آنها بهره‌های فراوان برده‌ام. با این حال و علی‌رغم آنکه نویسنده این سطور، خود نیز در سال ۱۳۸۲ کتابی با عنوان **آنالیز ریاضی** ترجمه و گردآوری کرد و توسط انتشارات سلاله زنجان به چاپ رسانید اما با توجه به تغییر عنوان رشته «ریاضی محض و کاربردی» به رشته «ریاضیات و کاربردها» و تغییر سرفصل این دروس از آنالیز ریاضی ۱ و ۲ به مبانی آنالیز ریاضی و تقلیل واحدهای درسی از دو درس ۴ واحدی به یک درس ۳ واحدی، این دغدغه مهم پدید آمد که با توجه به تغییرات مذکور، از چه کتابی و چه حجم مطالبی باید تدریس کرد که سرفصلی فراموش نشود و در عین حال در فرصت یک‌ترمی هم بتوان این مطالب را آموزش داد.

در پاسخ به این دغدغه، طی هفت سال اخیر از کتاب‌های متنوعی برای تدریس استفاده

کردم که نام و نشان بعضی از آنها در منابع ذکر شده است؛ هر کدام البته مزیت‌هایی داشتند، ولی هیچ‌یک به نحو مقتضی و رضایت‌بخشی، پاسخ‌گوی دغدغه مذکور نبودند و همین امر انگیزه‌ای شد برای تألیف و تدوین درسنامه‌ای که در ترم‌هایی متعدد تدریس شده است و اکنون به صورت کتاب حاضر در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌گیرد. در تنظیم مطالب کتاب حاضر از منابع جدیدی نیز استفاده شده است که مشخصات کتاب‌شناختی آنها را در فهرست منابع می‌توان دید. مایلم در اینجا به چند نکته بسیار مهم نیز اشاره کنم که در تهیه این مجموعه مدنظر بوده است:

۱. با توجه به قیمت بالای کتاب در سال جاری، سعی شده است کتاب با پوشش همه سرفصل، در حجم کمی تنظیم شود.
 ۲. یکی از مواردی که سعی بر رعایت آن داشته‌ام این است که با طرح تمرین‌هایی در متن کتاب، ایده حل مسئله با استفاده از تعاریف و قضایای متن درس محقق شود.
 ۳. ارائه تمرین‌های متنوع در اواخر هر فصل با توجه به آنچه در متن آموخته شده است.
- کتاب حاضر برای درس مبانی آنالیز ریاضی رشته ریاضیات و کاربردها و همچنین درس آنالیز ریاضی ۱ رشته آمار و کاربردها مناسب است.
- نویسنده این سطور همچنان که خود را وامدار مؤلفان پیشگام در این حوزه می‌داند و تلاش‌های آنان را ارج می‌نهد. از تمامی عزیزانی که در پدید آمدن اثر حاضر نیز از همراهی دریغ نکرده‌اند صمیمانه سپاس‌گزار است؛ از استاد ارجمند جناب آقای دکتر فرض‌اله میرزاپور که ویراستاری علمی کتاب را انجام و نظرات ارزنده‌ای در مورد تمرینات داشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم. از دکتر محمد ابراهیم‌پور نمین که ویراستاری ادبی اثر را به عهده داشتند و نیز از همکاران محترم در انتشارات دانشگاه زنجان هم برای چاپ و نشر کتاب کمال تشکر را دارم. در پایان تصریح این نکته نیز ضروری است که نقد و تذکر خطاها و کاستی‌های کتاب از سوی اساتید، همکاران و دانشجویان گرامی، بسیار مغتنم و موجب اعتلای اثر حاضر و سپاس بی‌نهایت این جانب خواهد بود.

علی مرصعی

زنجان، پاییز ۱۳۹۹

فهرست مطالب

مقدمه	ث
فهرست شکل‌ها	ذ
۱ فضاهای متری	۱
۱.۱ تعاریف و مثال‌ها	۱
۲.۱ مجموعه‌های باز	۷
۳.۱ مجموعه‌های بسته	۱۱
۴.۱ فشردگی	۱۶
۵.۱ همبندی	۲۲
مسائل	۲۴
۲ دنباله‌ها و سری‌های عددی	۳۱
۱.۲ همگرایی دنباله‌ها	۳۱
۲.۲ زیر دنباله، حد بالا و حد پایین یک دنباله	۳۹

ح فهرست مطالب

۳.۲	سری‌های عددی	۴۶
۴.۲	آزمون‌های همگرایی	۴۸
۵.۲	تجدید آرایش سری‌ها	۶۱
۶.۲	جمع و ضرب سری‌ها	۶۲
۶۴	مسائل	
۳	پیوستگی	۶۹
۱.۳	حد تابع	۶۹
۲.۳	تابع پیوسته و پیوسته یکنواخت	۷۲
۸۰	مسائل	
۴	مشتق	۸۵
۱.۴	مشتق‌پذیری	۸۵
۲.۴	خواص تابع مشتق	۹۲
۳.۴	قضیه تیلور و سری تیلور	۹۸
۱۰۰	مسائل	
۵	انتگرال ریمان	۱۰۳
۱.۵	تعریف انتگرال ریمان	۱۰۳
۲.۵	خواص انتگرال	۱۰۸
۳.۵	پادمشتق و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل	۱۱۹
۱۲۳	مسائل	
۶	دنباله‌ها و سری‌های توابع	۱۲۹
۱.۶	همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت	۱۳۰
۲.۶	تابع همه جا پیوسته هیچ جا مشتق‌پذیر	۱۴۲
۳.۶	قضیه تقریب ویراشتراس	۱۴۴

فهرست مطالب خ

۱۴۷ مسائل

۱۵۵ منابع

۱۵۷ نمایه

فهرست شکل‌ها

۱.۱	نامساوی مثلثی	۳
۲.۱	مقایسه اثر سه متر d ، d_1 و d_2 به ترتیب از چپ بر روی مجموعه $B(o; r)$	۶
۳.۱	مقایسه اثر متر d_2 بر روی مجموعه $B(o; r)$ با p های مختلف	۷
۴.۱	$B(a; r)$ گوی باز است	۹
۵.۱	زیرمجموعه فشرده، بسته است	۱۸
۶.۱	مسیر بین x و y	۲۳
۱.۲	همگرایی یک دنباله	۳۲
۲.۲	حدود بالا و پایین	۴۵
۱.۴	مشتق و خط مماس بر منحنی	۸۶
۲.۴	تعبیر هندسی قضیه رول	۹۲
۳.۴	تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین لاگرانژ	۹۵
۱.۵	مجموع پایین و بالای انتگرال ریمان	۱۰۴

ر فهرست شکل‌ها

۲.۵	نمایش هندسی قضیه مقدار میانگین برای انتگرال	۱۱۹
۱.۶	نمایش هندسی دنباله توابع و حد آن	۱۳۱
۲.۶	نمودار تابع متناوب φ	۱۴۳

۱

فضاهای متری

در این فصل به معرفی فضای متری^۱، انواع آنها، مجموعه‌های باز و بسته، نقاط حدی^۲ و تنها^۳، بستار^۴ یک مجموعه، مجموعه چگال^۵، فشرده^۶ و همبند^۷ خواهیم پرداخت.

۱.۱ تعاریف و مثال‌ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه نتهی باشد. تابع $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ یک متر

یا تابع فاصله روی X نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(الف) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) \geq 0$.

(ب) $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(ج) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = d(y, x)$. این را خاصیت تقارن می‌نامیم.

(د) برای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. این نامساوی را نامساوی

مثالی می‌نامیم.

زوج مرتب (X, d) را فضای متری می‌نامیم.

¹metric space ²limit point ³isolated point ⁴closure ⁵dense set ⁶compact set
⁷connected set